

第 19 講 特別な角の三角比

学習目標

- 30° 、 45° 、 60° の三角比を、特別な直角三角形の辺の比から求められる。
- 45° の三角比を、直角二等辺三角形から説明できる。
- 30° 、 60° の三角比を、正三角形を 2 等分してできる直角三角形から説明できる。
- 特別な角の三角比を使って、直角三角形の未知の辺の長さを求められる。

特別な角では三角比を正確に求められる

角だけで辺の比が決まる

直角三角形では、鋭角が決まると三角形の形が決まり、対応する辺の比も決まります。特に 30° 、 45° 、 60° では、よく知っている図形から辺の比を正確に求められます。

- 45° は直角二等辺三角形
- 30° と 60° は正三角形を 2 等分した三角形

を使います。

値だけを暗記するより、どの三角形から辺の比が生まれるかを理解しておく、忘れても自分で求め直せます。

45° は直角二等辺三角形から求める

2 辺が等しい直角三角形をつくる

2 つの鋭角がともに 45° である直角二等辺三角形を考えます。直角をはさむ 2 辺の長さをどちらも 1 とします。

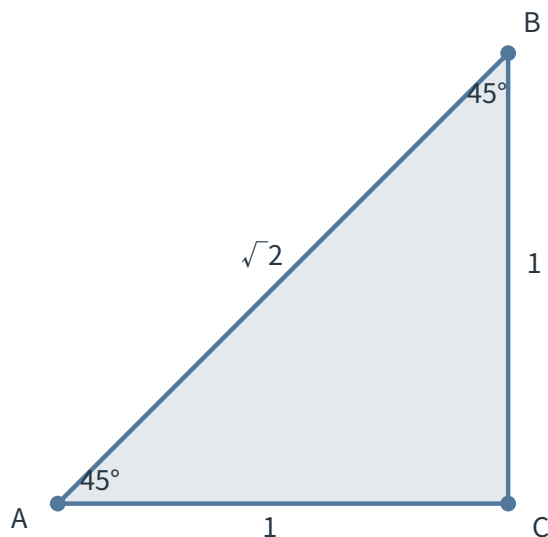


図 1 45° の三角比を求める直角二等辺三角形

斜辺 AB の長さを三平方の定理で求めると、

$$AB^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

なので、 $AB = \sqrt{2}$ です。

したがって、辺の比は

$$1 : 1 : \sqrt{2}$$

となります。

45° の三角比

45° を基準にすると、向かい側の辺が 1、となりの辺が 1、斜辺が $\sqrt{2}$ です。

したがって、 $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ です。

また、 $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ です。

さらに、 $\tan 45^\circ = 1$ です。

$\sin 45^\circ$ と $\cos 45^\circ$ が等しい理由

45° の直角三角形では、向かい側の辺ととなりの辺の長さが等しくなります。

$\sin$ は「向かい側 ÷ 斜辺」、 $\cos$ は「となり ÷ 斜辺」なので、分子が同じ長さになります。

そのため、 $\sin 45^\circ$ と $\cos 45^\circ$ は同じ値になります。

30° と 60° は正三角形から求める

正三角形を半分にする

1 辺の長さが 2 の正三角形を考え、その頂点から向かい側の辺へ垂線を引きます。

正三角形の各角は 60° です。垂線によって底辺は半分になるので、できた直角三角形の斜辺は 2、短い辺は 1 です。

残りの辺の長さを x とすると、三平方の定理より $x^2 + 1^2 = 2^2$ です。

したがって、 $x^2 = 3$ なので $x = \sqrt{3}$ です。

よって、30°、60°、90° の直角三角形の辺の比は、

$$1 : \sqrt{3} : 2$$

となります。

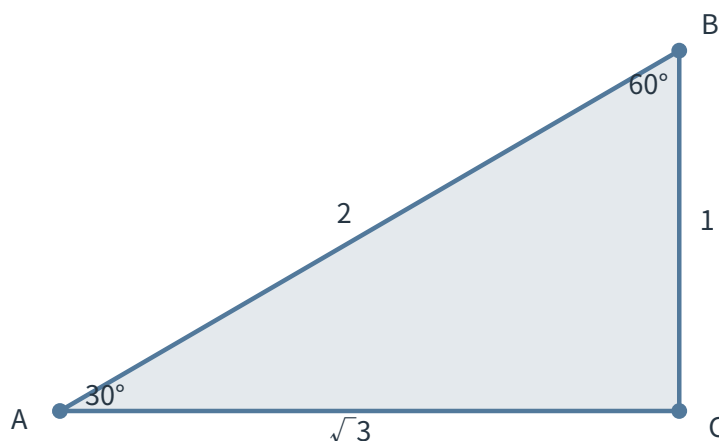


図2 30°、60° の三角比を求める直角三角形

30° の三角比

30° を基準にすると、向かい側の辺が 1、となりの辺が $\sqrt{3}$ 、斜辺が 2 です。

したがって、 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ です。

また、 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ です。

さらに、 $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ です。

60° の三角比

同じ三角形で 60° を基準にすると、向かい側の辺が $\sqrt{3}$ 、となりの辺が 1、斜辺が 2 です。

したがって、 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ です。

また、 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ です。

さらに、 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ です。

30° と 60° の値は入れ替わる**同じ三角形を反対側の角から見る**

30° と 60° は、同じ直角三角形の 2 つの鋭角です。

30° から見た「向かい側の辺」は、60° から見ると「となりの辺」になります。

反対に、30° から見た「となりの辺」は、60° から見ると「向かい側の辺」です。

そのため、 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ と $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ が等しく、 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ と $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ も等しくなります。

数字の並びを丸暗記するのではなく、同じ三角形をどちら側から見ているかを考えると整理しやすくなります。

3 つの角の値を整理する

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

表を覚える前に図へ戻る

値を忘れたときは、次の 2 つの辺の比へ戻ります。

- 45° : 1 : 1 : $\sqrt{2}$
- 30°、60° : 1 : $\sqrt{3}$: 2

そのうえで、 $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ の定義に当てはめれば値を復元できます。

分母の根号は有理化する

$\tan 30^\circ$ を辺の比から求めると、最初は $\frac{1}{\sqrt{3}}$ となります。

分母を有理化すると $\frac{\sqrt{3}}{3}$ です。

どちらも同じ値ですが、答えは通常、分母を有理化して表します。

特別な角を辺の計算に使う

三角比の値を比として使う

直角三角形で、斜辺が 10、ある鋭角が 30° だとします。

30° の向かい側の辺を x とすると、正弦の定義から $\sin 30^\circ = \frac{x}{10}$ です。

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ なので、 $\frac{x}{10} = \frac{1}{2}$ となり、 $x = 5$ です。

特別な角の三角比を知っていると、角度と 1 辺の長さから別の辺の長さを正確に求められます。

例題

例題 1

次の値を求めなさい。

(1) $\sin 30^\circ$

(2) $\cos 45^\circ$

(3) $\tan 60^\circ$

例題 1 の解答・解説

30° 、 45° 、 60° の基本的な三角比を使います。

(1) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ です。

(2) $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ です。

(3) $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ です。

値を忘れた場合は、 $1:1:\sqrt{2}$ または $1:\sqrt{3}:2$ の直角三角形から求め直せます。

例題 2

直角三角形 ABC で $\angle C = 90^\circ$ 、 $\angle A = 30^\circ$ 、斜辺 $AB = 12$ とする。

辺 BC の長さを求めなさい。

例題 2 の解答・解説

角 A に対して、 BC は向かい側の辺です。

$BC = x$ とすると、 $\sin 30^\circ = \frac{x}{12}$ です。

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ なので、 $\frac{x}{12} = \frac{1}{2}$ です。

したがって、 $x = 6$ です。

よって、 $BC = 6$ です。

例題 3

直角三角形 ABC で $\angle C = 90^\circ$ 、 $\angle A = 45^\circ$ 、 $AC = 5$ とする。

(1) 辺 BC の長さを求めなさい。

(2) 斜辺 AB の長さを求めなさい。

例題 3 の解答・解説

45° 、 45° 、 90° の三角形なので、直角をはさむ 2 辺の長さは等しくなります。

したがって、 $BC = 5$ です。

辺の比は $1:1:\sqrt{2}$ なので、斜辺は直角をはさむ辺の $\sqrt{2}$ 倍です。

よって、 $AB = 5\sqrt{2}$ です。

演習問題

練習問題 1

次の値を求めなさい。

- (1) $\sin 45^\circ$
- (2) $\cos 30^\circ$
- (3) $\cos 60^\circ$
- (4) $\tan 45^\circ$

練習問題 2

次の値を求めなさい。

- (1) $\sin 60^\circ$
- (2) $\tan 30^\circ$
- (3) $2 \sin 30^\circ$
- (4) $4 \cos 60^\circ$

練習問題 3

直角三角形 ABC で $\angle C = 90^\circ$ 、 $\angle A = 30^\circ$ 、 $AB = 16$ とする。

- (1) BC の長さを求めなさい。
- (2) AC の長さを求めなさい。

練習問題 4

直角三角形 ABC で $\angle C = 90^\circ$ 、 $\angle A = 60^\circ$ 、 $AB = 10$ とする。

- (1) AC の長さを求めなさい。
- (2) BC の長さを求めなさい。

練習問題 5

直角三角形 ABC で $\angle C = 90^\circ$ 、 $\angle A = 45^\circ$ 、 $AB = 8$ とする。

辺 AC と辺 BC の長さをそれぞれ求めなさい。

練習問題 6

直角三角形で、ある鋭角を A とする。

$\tan A = \sqrt{3}$ で、角 A に接する斜辺以外の辺の長さが 7 である。

角 A の向かい側の辺の長さを求めなさい。

練習問題 7

次の等式が正しいければ「正」、誤っていれば「誤」と答えなさい。

(1) $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$

(2) $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$

(3) $\tan 30^\circ = \tan 60^\circ$

(4) $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$

練習問題 8

ある生徒は、 $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}$ と答えました。

この誤りを、 30° 、 60° 、 90° の直角三角形の辺の比を使って説明し、正しい値を求めなさい。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

(1) $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ です。

(2) $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ です。

(3) $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ です。

(4) $\tan 45^\circ = 1$ です。

練習問題 2 の解答・解説

(1) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ です。

(2) $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ です。

(3) $2 \sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ です。

(4) $4 \cos 60^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ です。

練習問題 3 の解答・解説

(1) 30° の向かい側が BC なので、 $\sin 30^\circ = \frac{BC}{16}$ です。

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ より、 $BC = 8$ です。

(2) $\cos 30^\circ = \frac{AC}{16}$ です。

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より、 $AC = 8\sqrt{3}$ です。

練習問題 4 の解答・解説

(1) 60° のとなりの辺が AC なので、 $\cos 60^\circ = \frac{AC}{10}$ です。

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ より、 $AC = 5$ です。

(2) $\sin 60^\circ = \frac{BC}{10}$ です。

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より、 $BC = 5\sqrt{3}$ です。

練習問題 5 の解答・解説

45° 、 45° 、 90° の三角形なので、辺の比は $1:1:\sqrt{2}$ です。

斜辺が 8 なので、直角をはさむ 1 辺の長さを x とすると $x\sqrt{2} = 8$ です。

したがって、 $x = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ です。

よって、 $AC = BC = 4\sqrt{2}$ です。

練習問題 6 の解答・解説

角 A の向かい側の辺の長さを x とします。

正接の定義から、 $\tan A = \frac{x}{7}$ です。

$\tan A = \sqrt{3}$ なので、 $\frac{x}{7} = \sqrt{3}$ です。

したがって、 $x = 7\sqrt{3}$ です。

練習問題 7 の解答・解説

(1) 正です。どちらも $\frac{1}{2}$ です。

(2) 正です。どちらも $\frac{\sqrt{3}}{2}$ です。

(3) 誤です。 $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 、 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ です。

(4) 正です。どちらも $\frac{\sqrt{2}}{2}$ です。

したがって、順に「正、正、誤、正」です。

練習問題 8 の解答・解説

30° 、 60° 、 90° の直角三角形では、辺の比は $1:\sqrt{3}:2$ です。

30° を基準にすると、となりの辺が $\sqrt{3}$ 、斜辺が 2 です。

余弦は「となりの辺 ÷ 斜辺」なので、 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ です。

$\frac{1}{2}$ は、 30° を基準にしたときの $\sin 30^\circ$ の値です。