

## 第 150 講 $a_{n+1} = pa_n + q$ 型の漸化式

### 学習目標

- $a_{n+1} = pa_n + q$  型の漸化式で、変化しても残る値を見つけて一定倍率型へ変換できる。
- 変換後の数列から元の数列の一般項を求め、初項と更新式で確認できる。
- 特別な場合の条件を確認し、適切な扱い方を判断できる。

### 概念・意味・導出

漸化式  $a_{n+1} = pa_n + q$  は、数列そのものではなく、ある項から次の項を作る更新規則を表す式である。

$q = 0$  の場合は、もともと一定倍率型の漸化式になる。一方、 $q$  がある一般的な形では、一定量を加える変化が含まれるため、そのままでは一定倍率型として扱えない場合がある。そのため、更新しても変化しない基準値を探し、その値を引いて見る考え方を導入する。

変化しても変わらない値を  $c$  とする。つまり、その値を入れても次の値が同じになる状態を考える。

$$c = pc + q$$

この式を満たす  $c$  を引けば、一定倍率だけの変化に変えられる。

$$p \neq 1 \text{ のとき、} c = pc + q \text{ より、} (1-p)c = q$$

したがって、

$$c = \frac{q}{1-p}$$

となる。

この  $c$  を用いて、元の漸化式からこの式を引く。

$$\begin{aligned} a_{n+1} - c &= pa_n + q - (pc + q) \\ &= p(a_n - c) \end{aligned}$$

$$\text{ここで、} b_n = a_n - c$$

とおくと、 $b_{n+1} = pb_n$  となる。つまり、もとの数列は一定倍率で変化する数列に変換できる。

初項は、 $b_1 = a_1 - c$  である。

$p \neq 0, 1$  のとき、第 149 講で扱った一定倍率型の漸化式の一般項を使うと、 $b_1 = a_1 - c$  を初項とする数列について、 $b_n = (a_1 - c)p^{n-1}$  となるため、

$$a_n = c + (a_1 - c)p^{n-1}$$

を得る。

この考え方の中心は、増加量を見ることではなく、更新によって変化しない基準値を探すことである。

ただし、 $a_1 = c$  の場合は  $b_n = 0$  となる。このとき数列は定数列であり、隣接する項の比を使って公比を決める考え方を無理に適用しない。

$p = 1$  の場合は、 $a_{n+1} = a_n + q$  となり、第 148 講で扱った一定差型の漸化式になる。

$p = 0$  の場合は、 $a_{n+1} = q$  となるため、初項  $a_1$  と  $n \geq 2$  の項を分けて考える。 $0^0$  を含む表現で処理しない。

**条件**

$n$  は正整数とする。 $p, q$  は実数であり、 $n$  によらない定数である。初項  $a_1$  も実数とする。  
この講では、全ての正整数  $n$  について、 $a_{n+1} = pa_n + q$  が成立する場合を扱う。

**注意**

$p \neq 1$  のときに求める

$$c = \frac{q}{1-p}$$

は、更新しても変わらない基準値として導入する値である。  
ここでは、この値を極限值と断定したり、収束・発散を論じたりしない。数列を一定倍率型へ変換するための基準として扱う。

**例題 1**

$a_1 = 1$ 、 $a_{n+1} = 2a_n + 3$  で定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

**例題 1 の解答・解説**

この漸化式では、 $+3$  があるため、そのままでは等比数列として見ることはできない。変化しても変わらない値  $c$  を探す。

$c = 2c + 3$  より、 $c = -3$  である。

そこで、 $b_n = a_n - c = a_n + 3$

とおく。

元の式から  $c = 2c + 3$  を引くと、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - c &= 2a_n + 3 - (2c + 3) \\ &= 2(a_n - c) \end{aligned}$$

したがって、 $b_{n+1} = 2b_n$  となる。

初項は、 $b_1 = a_1 + 3 = 4$  であるから、 $b_n = 4 \cdot 2^{n-1}$  となる。

よって、 $a_n = b_n - 3$  より、 $a_n = 4 \cdot 2^{n-1} - 3$  となる。

確認すると、 $a_1 = 4 \cdot 2^0 - 3 = 1$

で初項に一致する。

また、

$$\begin{aligned} 2a_n + 3 &= 2(4 \cdot 2^{n-1} - 3) + 3 \\ &= 4 \cdot 2^n - 3 \end{aligned}$$

であり、 $a_{n+1} = 4 \cdot 2^n - 3$

と一致するため、更新式も満たす。

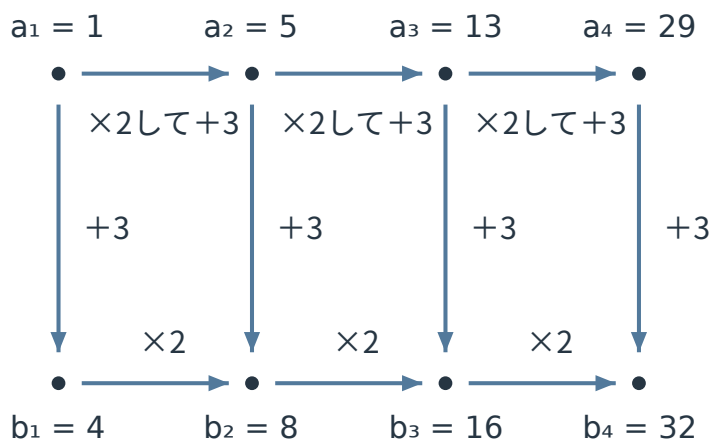


図1 固定値  $c = -3$  を引き、 $b_n = a_n - c = a_n + 3$  と置く。縦の矢印は同じ「 $+3$ 」の変換であり、上段の「 $\times 2$ して $+3$ 」は下段で「 $\times 2$ 」になる。上下の位置は項の対応を示し、値の大きさを表さない。

## 例題 2

$a_1 = 6$ 、 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2$  で定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

## 例題 2 の解答・解説

変化しても変わらない値  $c$  を求める。

$$c = \frac{1}{2}c + 2$$

より、

$$\frac{1}{2}c = 2$$

したがって、 $c = 4$  となる。

ここで、 $b_n = a_n - c = a_n - 4$

とおく。

元の式から  $c = \frac{1}{2}c + 2$  を引くと、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - c &= \frac{1}{2}a_n + 2 - \left(\frac{1}{2}c + 2\right) \\ &= \frac{1}{2}(a_n - c) \end{aligned}$$

よって、

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$$

である。

初項は、 $b_1 = 6 - 4 = 2$ だから、

$$b_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となる。

したがって、

$$a_n = 4 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である。

確認すると、 $a_1 = 4 + 2 = 6$

で初項に一致する。

また、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a_n + 2 &= \frac{1}{2}\left(4 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) + 2 \\ &= 4 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

となり、

$$a_{n+1} = 4 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

と一致する。

**例題 3**

$a_1 = 0$ 、 $a_{n+1} = -2a_n + 3$  で定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

### 例題 3 の解答・解説

変化しても変わらない値  $c$  を求める。

$$c = -2c + 3 \text{ より、} 3c = 3$$

したがって、 $c = 1$  となる。

$$\text{そこで、} b_n = a_n - c = a_n - 1$$

とおく。

元の式から  $c = -2c + 3$  を引く。

$$\begin{aligned} a_{n+1} - c &= -2a_n + 3 - (-2c + 3) \\ &= -2(a_n - c) \end{aligned}$$

よって、 $b_{n+1} = -2b_n$  である。

初項は、 $b_1 = a_1 - 1 = -1$  だから、 $b_n = -(-2)^{n-1}$  となる。

元の数列へ戻すと、 $a_n = 1 - (-2)^{n-1}$  である。

$$\text{確認すると、} a_1 = 1 - (-2)^0 = 0$$

で初項に一致する。

また、

$$\begin{aligned} -2a_n + 3 &= -2(1 - (-2)^{n-1}) + 3 \\ &= 1 + 2(-2)^{n-1} \\ &= 1 - (-2)^n \end{aligned}$$

となり、 $a_{n+1} = 1 - (-2)^n$

と一致する。

### 演習問題

#### 練習問題 1

$a_1 = 3$ 、 $a_{n+1} = 3a_n - 4$  で定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

#### 練習問題 2

$a_1 = -1$ 、 $a_{n+1} = -2a_n + 6$  で定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

#### 練習問題 3

$a_1 = 5$ 、 $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 4$  で定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

#### 練習問題 4

$a_1 = 7$ 、 $a_{n+1} = 2a_n - 7$  で定められる数列  $\{a_n\}$  について、一般項を求めよ。また、この数列が定数列になることを説明せよ。

**練習問題 5**

$a_1 = 3$ 、 $a_{n+1} = a_n + 5$  で定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。  
ただし、 $a_{n+1} = pa_n + q$  型で考えると、どのような条件で別の扱いになるかを説明せよ。

**練習問題 6**

$a_1 = 8$ 、 $a_{n+1} = 0a_n - 3$  で定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。  
 $0^0$  を使わずに考えよ。

**練習問題 7**

$a_1 = 4$ 、 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$  で定められる数列  $\{a_n\}$  について、次の変換を用いて一般項を求めよ。  
 $b_n = a_n - c$   
ただし、 $c$  は変化しても変わらない値である。

**練習問題 8**

数列  $\{a_n\}$  が  
 $a_{n+1} = 2a_n + 3$   
という更新式を満たす。  
ある学習者が、  
「 $c = 3$  を引けばよいので、 $b_n = a_n - 3$  とおくと  $b_{n+1} = 2b_n$  になる」  
と考えた。  
この考えの誤りを説明し、正しい変換を示せ。

**練習問題 1 の解答・解説**

変化しても変わらない値  $c$  を求める。

$$c = 3c - 4 \text{ より、} 2c = 4$$

したがって、 $c = 2$  である。

$$\text{そこで、} b_n = a_n - c = a_n - 2$$

とおく。

元の式から  $c = 3c - 4$  を引くと、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2 &= 3a_n - 4 - 2 \\ &= 3a_n - 6 \\ &= 3(a_n - 2) \end{aligned}$$

より、 $b_{n+1} = 3b_n$  となる。

初項は、 $b_1 = a_1 - 2 = 1$  である。

したがって、 $b_n = 3^{n-1}$  となる。

元の数列へ戻すと、 $a_n = 2 + 3^{n-1}$  である。

確認すると、 $a_1 = 2 + 3^0 = 3$

で初項に一致する。

また、

$$\begin{aligned}3a_n - 4 &= 3(2 + 3^{n-1}) - 4 \\ &= 2 + 3^n\end{aligned}$$

となり、 $a_{n+1} = 2 + 3^n$

と一致するため、更新式も満たす。

## 練習問題 2 の解答・解説

---

変化しても変わらない値  $c$  を求める。

$c = -2c + 6$  より、 $3c = 6$

したがって、 $c = 2$  である。

$b_n = a_n - 2$

とおく。

すると、

$$\begin{aligned}a_{n+1} - 2 &= -2a_n + 6 - (-2 \cdot 2 + 6) \\ &= -2(a_n - 2)\end{aligned}$$

となるため、 $b_{n+1} = -2b_n$  である。

初項は、 $b_1 = a_1 - 2 = -3$  である。

よって、 $b_n = -3(-2)^{n-1}$  となる。

元の数列へ戻すと、 $a_n = 2 - 3(-2)^{n-1}$  である。

確認すると、 $a_1 = 2 - 3 = -1$

で初項に一致する。

また、

$$\begin{aligned}-2a_n + 6 &= -2(2 - 3(-2)^{n-1}) + 6 \\ &= 2 + 6(-2)^{n-1} \\ &= 2 - 3(-2)^n\end{aligned}$$

となり、 $a_{n+1} = 2 - 3(-2)^n$

と一致する。

## 練習問題 3 の解答・解説

---

変化しても変わらない値  $c$  を求める。

$$c = \frac{1}{3}c + 4$$

より、

$$\frac{2}{3}c = 4$$

したがって、 $c = 6$  である。

$b_n = a_n - 6$

とおく。

すると、

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - 6 &= \frac{1}{3}a_n + 4 - \left(\frac{1}{3} \cdot 6 + 4\right) \\
 &= \frac{1}{3}(a_n - 6)
 \end{aligned}$$

より、

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n$$

となる。

初項は、 $b_1 = 5 - 6 = -1$ である。

したがって、

$$b_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

である。

よって、

$$a_n = 6 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

となる。

確認すると、 $a_1 = 6 - 1 = 5$

で初項に一致する。

また、

$$\frac{1}{3}a_n + 4 = 6 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

となり、

$$a_{n+1} = 6 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

と一致する。

#### 練習問題 4 の解答・解説

変化しても変わらない値  $c$  を求める。

$c = 2c - 7$  より、 $c = 7$  である。

ここで、 $b_n = a_n - 7$

とおく。

すると、

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - 7 &= 2a_n - 7 - (2 \cdot 7 - 7) \\
 &= 2(a_n - 7)
 \end{aligned}$$

より、 $b_{n+1} = 2b_n$  となる。

初項は、 $b_1 = 7 - 7 = 0$  である。

したがって、 $b_n = 0$  であり、 $a_n = 7$  となる。

これは初項が変化しない値  $c$  と一致しているため、定数列になる。

確認すると、 $a_1 = 7$  であり、 $2a_n - 7 = 2 \cdot 7 - 7 = 7$  なので、全ての  $n$  で更新式を満たす。

### 練習問題 5 の解答・解説

この式は、 $a_{n+1} = a_n + 5$ である。

これは  $p = 1$  の場合である。

$p = 1$  のとき、 $c = pc + q$

は、 $c = c + 5$ となり、変化しない値  $c$  を決めることができない。

この場合は一定差型として考える。

初項から毎回 5 ずつ増えるので、 $a_n = 3 + 5(n - 1)$ となる。

確認すると、 $a_1 = 3 + 5 \cdot 0 = 3$

で初項に一致する。

また、 $a_{n+1} = 3 + 5n$ であり、 $a_n + 5 = 3 + 5(n - 1) + 5 = 3 + 5n$ となるため、更新式を満たす。

### 練習問題 6 の解答・解説

式は、 $a_{n+1} = 0a_n - 3$ である。

したがって、 $a_{n+1} = -3$ となる。

$p = 0$  の場合は、初項と  $n \geq 2$  の項を分けて考える。

初項は、 $a_1 = 8$ である。

一方、 $a_2 = -3$

以降は同じ更新が続くため、 $a_n = -3$

は  $n \geq 2$  で成立する。

確認すると、 $a_1 = 8$

で初項に一致する。

また、 $n \geq 1$  で、 $0a_n - 3 = -3$ となり、次の項は必ず  $-3$  になる。

### 練習問題 7 の解答・解説

変化しても変わらない値  $c$  を求める。

$$c = \frac{1}{2}c + 1$$

より、

$$\frac{1}{2}c = 1$$

したがって、 $c = 2$ である。

指定された変換より、 $b_n = a_n - 2$

とおく。

すると、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2 &= \frac{1}{2}a_n + 1 - \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + 1\right) \\ &= \frac{1}{2}(a_n - 2) \end{aligned}$$

となる。

よって、

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$$

である。

初項は、 $b_1 = a_1 - 2 = 2$ だから、

$$b_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となる。

元の数列へ戻すと、

$$a_n = 2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である。

確認すると、 $a_1 = 2 + 2 = 4$

で初項に一致する。

また、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a_n + 1 &= \frac{1}{2}\left(2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) + 1 \\ &= 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= 2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

となり、

$$a_{n+1} = 2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

と一致する。

### 練習問題 8 の解答・解説

誤りは、変化しても変わらない値  $c$  を正しく求めている点にある。

正しい  $c$  は、 $c = 2c + 3$  を満たす値である。

よって、 $c = -3$  となる。

3 は加えられる数であり、引く基準となる値ではない。

正しくは、 $b_n = a_n - (-3) = a_n + 3$

とおく。

すると、

$$\begin{aligned}a_{n+1} + 3 &= 2a_n + 3 + 3 \\ &= 2a_n + 6 \\ &= 2(a_n + 3)\end{aligned}$$

より、 $b_{n+1} = 2b_n$  となる。

初項は、 $b_1 = a_1 + 3$  であり、元の初項を変換した値を使う必要がある。

このように、 $b_n$  は計算を簡単にするための新しい数列であり、最後には  $a_n = b_n + c$  として元の数列へ戻す。

確認すると、 $a_{n+1} = 2a_n + 3$

に  $a_n = b_n - 3$  を戻すことで、変換後の式と一致する。