第 200 講 方程式・不等式への応用

学習目標

この講では、微分を利用して方程式の実数解の個数を調べる方法と、不等式を証明する方法を学ぶ。
学習後には、次のことができるようになる。
- 方程式を関数の零点の問題へ変換できる。
- 実数解の存在を連続性と符号の変化、または値域から判断できる。
- 導関数を利用して厳密単調性を示し、解の一意性を説明できる。
- 不等式を関数の最大値・最小値の問題として考えられる。
- 指数関数・対数関数を含む方程式や不等式でも、微分による判断ができる。

方程式の実数解を関数の問題として見る

方程式 $f(x)=0$ の実数解を調べることは、関数 $y=f(x)$ と x 軸の交点の個数を調べることと同じである。
ただし、グラフの見た目だけで解の個数を決めることはできない。証明では、解の存在と解の一意性を分けて考える。
関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ 上で連続であり、$a<b$ かつ $f(a)f(b)<0$ を満たすならば、a と b の間に $f(x)=0$ を満たす実数が少なくとも 1 つ存在する。
一方、導関数によって関数が厳密に増加または厳密に減少することを示せば、同じ値を 2 回とることはない。そのため、方程式 $f(x)=0$ の解は高々 1 個である。
実数解の個数を決めるときは、存在を示す条件と、一意性を示す条件を別々に確認することが重要である。

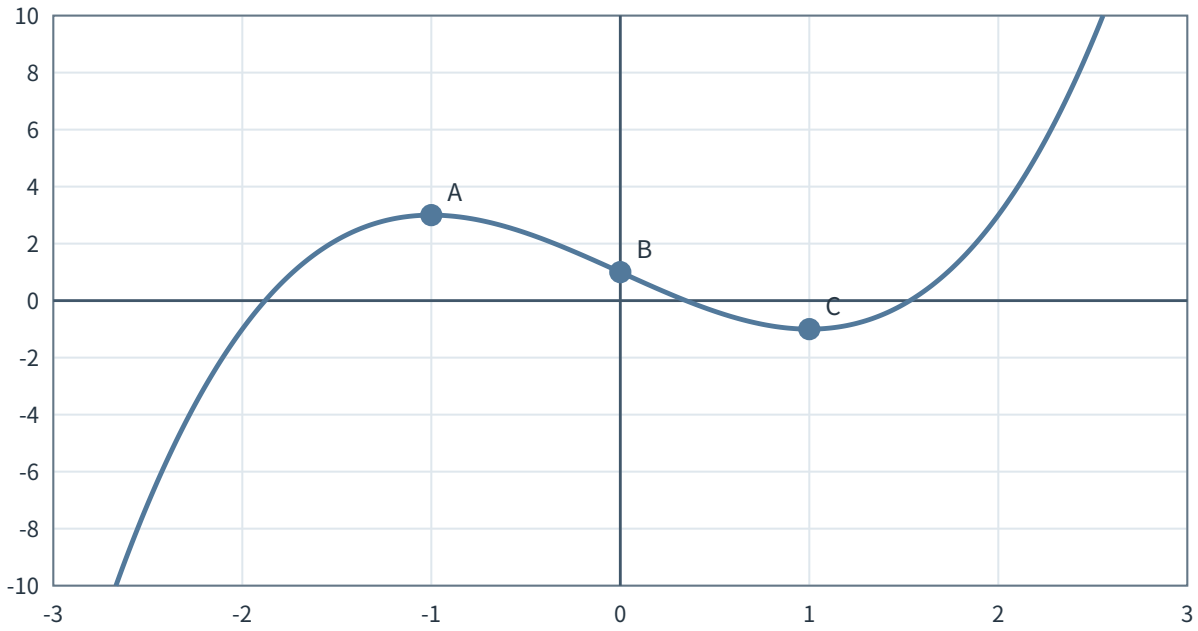

図 1　三次関数の零点を考えるためのグラフ

存在と一意性を分けて考える

解の個数を調べるときは、各単調区間で解の存在と、解が高々 1 個であることを分けて確認する。

存在を調べる場合は、関数の連続性と符号の変化を利用する。連続な関数が区間の両端で異なる符号をとれば、その区間内に少なくとも 1 つの零点がある。
方程式の解の個数を調べるには、まず関数 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ の増減を確認する。
導関数は次の式である。

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

例題 1 で扱うこの関数では、臨界点は $x = -1, 1$ であり、導関数の符号から増減を判断できる。

	x<-1	x=-1	-1<x<1	x=1	x>1
f'(x)	+	0	-	0	+

図 2　例題 1 の導関数の符号表

したがって、関数 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ は増加、減少、増加の順に変化する。極値の位置と値を調べることで、零点の個数を判断できる。

不等式への応用

不等式を証明するときは、関数の最小値や最大値を調べる問題へ変換する。
閉区間 $[a, b]$ 上で連続な関数 $f(x)$ は、必ず最大値と最小値をもつ。この性質を利用すると、区間内での最小値を確認することで $f(x) \geq 0$ のような不等式を証明できる。
最大値・最小値を調べる場合は、区間内部の極値だけでなく端点の値も確認する必要がある。

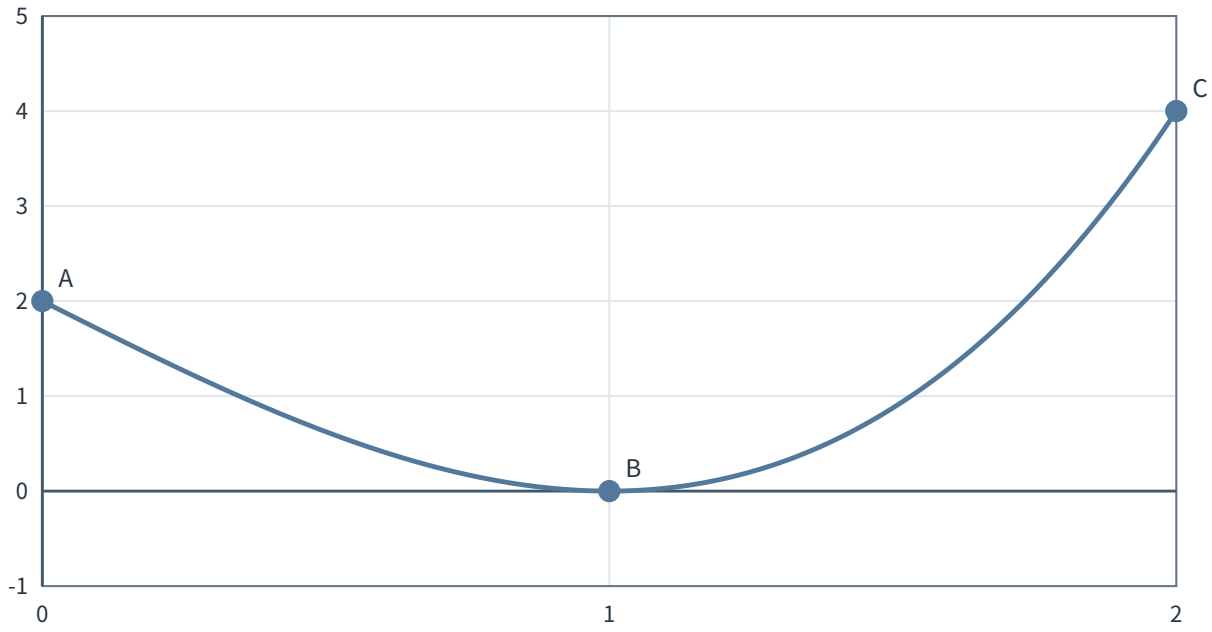

図 3　区間 $[0, 2]$ での関数の最小値と端点

図は判断の補助であり、証明では導関数による増減と端点の確認を行う。

指数関数・対数関数を含む場合

指数関数や対数関数を含む方程式でも、基本的な考え方は変わらない。関数を定め、定義域、連続性、増減を調べて解の個数を判断する。

©ミライコーチング

自然対数は $\log_e x$ と表し、e は自然対数の底である。
対数関数を扱う場合は、最初に真数条件を確認する必要がある。例えば $\log_e x$ を含む式では $x>0$ が定義域となる。
指数関数や対数関数を含む方程式でも、左辺と右辺の差を関数として定め、その関数の零点の個数を調べることで、連続性や増減を利用した解の個数判断ができる。

例題 1

方程式 $x^3-3x+1=0$ の実数解の個数を求めよ。

例題 1 の解答・解説

関数 $f(x)=x^3-3x+1$ を考える。
導関数は $f'(x)=3x^2-3$ である。
$f'(x)=0$ より、臨界点は $x=-1,1$ である。
導関数の符号を調べると、$x<-1$ と $x>1$ では $f'(x)>0$、$-1<x<1$ では $f'(x)<0$ である。
したがって、関数 $f(x)$ は $(-\infty,-1)$ で厳密に増加し、$(-1,1)$ で厳密に減少し、$(1,\infty)$ で厳密に増加する。
また、 $f(-1)=3$、$f(1)=-1$ である。
この三次関数はすべての実数で連続であり、両端では次の極限を満たす。

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

よって、$(-\infty,-1)$ では連続性と厳密増加性により 1 個、$(-1,1)$ では連続性と厳密減少性により 1 個、$(1,\infty)$ では連続性と厳密増加性により 1 個の零点をもつ。
各区間で解は高々 1 個であり、実際に 1 個ずつ存在するため、異なる実数解は 3 個存在する。

例題 2

方程式 $\log_e x=x-2$ の異なる実数解の個数を求めよ。

例題 2 の解答・解説

関数 $f(x)=\log_e x-x+2$ を考える。
定義域は $x>0$ である。
導関数は次の式である。

$$f'(x)=\frac{1}{x}-1$$

$f'(x)=0$ より、$x=1$ である。
$0<x<1$ では $f'(x)>0$ であり、$x>1$ では $f'(x)<0$ であるため、関数 $f(x)$ は $0<x<1$ で厳密に増加し、$x>1$ で厳密に減少する。
したがって、$x=1$ で最大値をとる。
最大値は $f(1)=1$ である。
また、$f(x)$ は定義域 $x>0$ 上で連続である。
x を右側から 0 に近づけると、自然対数の性質より次の極限が成り立つ。

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty$$

一方、$x \geq 2$ では導関数は次の不等式を満たす。

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \leq -\frac{1}{2}$$

平均値の定理より、$x \geq 2$ で次の上界が得られる。

$$f(x) \leq f(2) - \frac{x-2}{2}$$

右辺は $x \to \infty$ で $-\infty$ へ向かうため、$f(x) \to -\infty$ となる。
よって、$0 < x < 1$ の区間では連続性と単調増加性により 1 個、$x > 1$ の区間では連続性と単調減少性により 1 個の零点をもつ。
したがって、方程式の異なる実数解は 2 個存在する。

例題 3

区間 $0 \leq x \leq 2$ において、 $x^3 - 3x + 2 \geq 0$ を示せ。

例題 3 の解答・解説

関数 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ を考える。
導関数は $f'(x) = 3x^2 - 3$ である。
したがって、 $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ となる。
区間は $0 \leq x \leq 2$ なので、$x = -1$ は考える必要がない。
$0 < x < 1$ では $f'(x) < 0$、$1 < x < 2$ では $f'(x) > 0$ である。
よって、$x = 1$ で最小値をとる。
最小値は $f(1) = 0$ である。
また、端点では $f(0) = 2$、$f(2) = 4$ である。
区間内の最小値が 0 であるため、 $x^3 - 3x + 2 \geq 0$ が成立する。
等号成立は $x = 1$ のときである。

練習問題

練習問題 1

方程式 $x^3 - 4x + 1 = 0$ の異なる実数解の個数を求めよ。

練習問題 2

方程式 $e^x = 2x + 1$ の異なる実数解の個数を求めよ。

練習問題 3

方程式 $\log_e x = ax$ が異なる 2 個の実数解をもつような定数 a の範囲を求めよ。
ただし、定義域に注意して考えること。

©ミライコーチング

練習問題 4

方程式 $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつための定数 a の条件を求めよ。

練習問題 5

関数 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ について、区間 $(-1, 2)$ における $f(x)$ の値の範囲を求めよ。
また、最小値または最大値が存在するかどうかを理由とともに説明せよ。

練習問題 6

次の関数を考える。

$$f(x) = x + \frac{4}{x}$$

定義域 $x > 0$ における最小値を求めよ。また、等号成立条件を示せ。

練習問題 7

関数 $f(x) = \log_e x - x + 1$ について、次を示せ。

$$\log_e x \leq x - 1$$

ただし、$x > 0$ とする。
また、等号成立条件を求めよ。

練習問題 8

方程式 $x^3 - 3x + b = 0$ について、定数 b の値によって異なる実数解の個数がどのように変化するか調べよ。

©ミライコーチング

練習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

関数 $f(x) = x^3 - 4x + 1$ を考える。
導関数は $f'(x) = 3x^2 - 4$ である。
臨界点を簡潔に表すため、正の定数 c を次のように定める。

$$c = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

臨界点は $x = -c, c$ である。
導関数の符号より、関数 $f(x) = x^3 - 4x + 1$ は $x < -c$ と $x > c$ で増加し、$-c < x < c$ で減少する。
極大値は次の正の値である。

$$f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 1 + \frac{16}{3\sqrt{3}}$$

極小値は次の負の値である。

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \frac{16}{3\sqrt{3}}$$

極大値は正、極小値は負である。
この三次関数はすべての実数で連続であり、両端では次の極限を満たす。

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

さらに、各増減区間では厳密単調であるため、それぞれの区間で零点は高々 1 個である。
連続性により各区間に零点が存在し、厳密単調性によりそれぞれ 1 個に限られる。
したがって、異なる実数解は 3 個存在する。

練習問題 2 の解答・解説

関数 $f(x) = e^x - 2x - 1$ を考える。この関数はすべての実数で連続である。
導関数は $f'(x) = e^x - 2$ である。
$f'(x) = 0$ より、$x = \log_e 2$ を得る。
$x < \log_e 2$ では $f'(x) < 0$、$x > \log_e 2$ では $f'(x) > 0$ であるため、$x = \log_e 2$ で最小値をとる。
また、$f(0) = 0$ である。$0 < \log_e 2$ なので、$x = 0$ から $x = \log_e 2$ まで厳密に減少することから、最小値は 0 より小さい。
さらに、$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ である。$x \to -\infty$ では e^x は 0 に近づき、$-2x - 1$ が大きくなるためである。
また、$x \geq \log_e 2 + 1$ では $f'(x) = e^x - 2$ は正の一定値以上となるため、右側では単調に増加し、$x \to \infty$ で $f(x) \to \infty$ となる。
したがって、最小値が負であり、両端で正の無限大へ向かうことから、x 軸との交点は 2 個存在する。
よって、異なる実数解は 2 個である。

練習問題 3 の解答・解説

定義域より $x > 0$ である。
方程式の両辺を正の数 x で割り、次の関数を定める。

$$g(x) = \frac{\log_e x}{x}$$

このとき、方程式の解は曲線 $y = g(x)$ と直線 $y = a$ の交点に対応する。
導関数は次の式である。

$$g'(x) = \frac{1 - \log_e x}{x^2}$$

したがって、$0 < x < e$ では $g'(x) > 0$、$e < x$ では $g'(x) < 0$ である。
よって、$g(x)$ は $(0, e)$ で厳密に増加し、(e, ∞) で厳密に減少する。
定義域の両端では、次の極限が成り立つ。後者は既習の標準極限である。

$$\lim_{x \to 0+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

最大値は $x = e$ でとる次の値であり、これを m とおく。

$$m = \frac{1}{e}$$

連続性と増減から、$0 < a < m$ のときは 2 個、$a \leq 0$ のときは 1 個、$a = m$ のときは 1 個、$a > m$ のときは 0 個の実数解をもつ。
したがって、求める条件は次の範囲である。

$$0 < a < \frac{1}{e}$$

練習問題 4 の解答・解説

関数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x$ を考える。
まず因数分解すると、 $f(x) = x(x^2 - 3ax + 3a^2)$ となる。
二次式部分の判別式は $D = (-3a)^2 - 4 \cdot 3a^2 = -3a^2$ である。
したがって、$a \neq 0$ では二次式部分は実数解をもたず、$a = 0$ では重解になるため、3 個の異なる実数解は存在しない。
さらに、この関数を微分すると、 $f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3a^2$ であり、 $f'(x) = 3(x - a)^2$ となる。
よって、$f'(x) \geq 0$ であり、$x = a$ 以外では常に正である。
したがって、関数は全実数で厳密に増加する。
また、$f(0) = 0$ であるため、$x = 0$ が唯一の実数解となる。
以上より、この方程式が 3 個の異なる実数解をもつような定数 a は存在しない。

練習問題 5 の解答・解説

関数 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ を考える。
導関数は $f'(x) = 3x^2 - 3$ である。
区間 $(-1, 2)$ では、$-1 < x < 1$ のとき $f'(x) < 0$ であり、$1 < x < 2$ のとき $f'(x) > 0$ である。
したがって、関数は $(-1, 1)$ で厳密に減少し、$(1, 2)$ で厳密に増加する。
最小値は $x = 1$ でとり、$f(1) = 0$ である。
端点での多項式の連続性から、次の極限が成り立つ。

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = 4$$

しかし、区間は開区間 $(-1, 2)$ であり、さらに増減から端点へ向かう途中の関数値は 4 に達しない。
したがって、関数値は 4 に近づくが 4 をとらない。
よって、値の範囲は $0 \leq f(x) < 4$ である。
最小値は 0 として存在し、最大値は存在しない。

練習問題 6 の解答・解説

問題の関数を微分し、定義域 $x > 0$ で増減を調べる。
導関数は次の式である。

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ より、$x = 2$ を得る。
定義域内で、$0 < x < 2$ のとき $f'(x) < 0$、$x > 2$ のとき $f'(x) > 0$ である。
したがって、関数は $0 < x < 2$ で減少し、$x > 2$ で増加するため、$x = 2$ で最小値をとる。
$f(2) = 4$ であるため、最小値は 4 であり、等号成立条件は $x = 2$ である。

練習問題 7 の解答・解説

関数 $f(x) = \log_e x - x + 1$ を考える。
導関数は次の式である。

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$x = 1$ で $f'(1) = 0$ となる。
また、$0 < x < 1$ では $f'(x) > 0$、$x > 1$ では $f'(x) < 0$ である。
したがって、$x = 1$ で最大値をとる。
その値は、 $f(1) = 0$ である。
よって、すべての $x > 0$ について $f(x) \leq 0$ が成立する。
つまり、 $\log_e x - x + 1 \leq 0$ であり、 $\log_e x \leq x - 1$ となる。
等号成立条件は $x = 1$ である。

練習問題 8 の解答・解説

関数 $f(x) = x^3 - 3x + b$ を考える。
導関数は $f'(x) = 3x^2 - 3$ である。
臨界点は $x = -1, 1$ であり、導関数の符号は $+$、$-$、$+$ となる。
したがって、関数は増加、減少、増加の順に変化する。
極大値と極小値は $f(-1) = b + 2$、$f(1) = b - 2$ である。
この三次関数はすべての実数で連続であり、両端では次の極限を満たす。

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

$-2 < b < 2$ のとき、極大値は正、極小値は負になる。このとき連続性により 3 つの増減区間にそれぞれ零点が存在し、厳密単調性により各区間の零点は 1 個である。
したがって、この場合は異なる実数解が 3 個存在する。
$b = 2$ のときは $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$ であり、$x = 1$ は重解である。異なる実数解は $x = -2, 1$ の 2 個である。
$b = -2$ のときは $x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2)$ であり、異なる実数解は $x = -1, 2$ の 2 個である。
$b > 2$ または $b < -2$ のときは、極大値と極小値がともに同じ側になるため、連続性と増減から零点は 1 個だけである。
以上より、異なる実数解の個数は、$-2 < b < 2$ のとき 3 個、$b = \pm 2$ のとき 2 個、それ以外のとき 1 個である。