第 216 講 2 曲線で囲まれた面積

学習目標

- 2 曲線の方程式を連立し、交点のx座標を積分区間の候補として求められる。
- 各区間で 2 曲線の上下関係を差$f(x)-g(x)$の符号から判定できる。
- 縦の長さを上側の関数から下側の関数を引いた非負量として表し、面積を定積分で求められる。
- 交点が 3 個以上あり上下関係が変わる場合に、必要な位置で区間を分けて総面積を求められる。
- 接する交点があっても上下関係が変わるとは限らないことを説明できる。
- 絶対値を含む関数、無理関数、指数関数、三角関数、有理関数でも、定義域・交点・上下関係を確認して同じ手順を使える。
- 2 曲線へ同じ関数を加えても、差が変わらないため交点のx座標と面積が変わらないことを証明できる。

2 曲線の間の面積

実数$a<b$とし、関数f,gは閉区間$[a,b]$で連続であるとする。曲線$y=f(x)$と$y=g(x)$の間の縦の長さは$|\,f(x)-g(x)\,|$である。両曲線が$x=a,b$で交わり、その間にある有界領域の面積をSとすると、

$$S=\int_a^b |\,f(x)-g(x)\,|\,dx$$

である。
区間全体で$f(x)\geq g(x)$なら、

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

である。区間全体で$g(x)\geq f(x)$なら、引く順序を逆にする。上下関係が交代する場合は、その位置で区間を分け、各区間で必ず「上側−下側」を積分する。

差を作ると交点と高さを同時に管理できる

交点の方程式$f(x)=g(x)$は、差$f(x)-g(x)=0$と同じである。また、$f(x)-g(x)>0$ならfが上側、$f(x)-g(x)<0$ならgが上側である。したがって、差$f-g$を先に作ると、積分区間の候補になる交点と、面積の高さを同じ 1 つの式で管理できる。
第 215 講のx軸との面積は、下側または上側の一方を特別な曲線$y=0$とした場合とみなせる。2 曲線の場合にも、面積そのものは負にならないため、各区間の被積分関数を非負な「上側−下側」にするという原則は同じである。
問題文に垂直境界が指定されていないときは、任意のx座標を端点として補ってはならない。2 曲線自身が囲む領域では交点から端点を決める。一方、区間が指定されている問題では、端点が交点でなくても指定された境界に従う。

©ミライコーチング

交点があっても上下が交代するとは限らない

連続関数$f-g$が点cの左右で符号を変えるなら、連続性により$f(c)=g(c)$である。したがって、交点であることは上下交代に必要である。
しかし、交点であることだけでは十分ではない。例えば、$y=x^2+1$と$y=1$は$x=0$で接するが、$x\neq 0$では常に$x^2+1>1$であり、上下関係は変わらない。
多項式の差では、交点に対応する根の重複度が奇数なら符号が変わり、偶数なら変わらない。一般の関数へこの規則を機械的に広げず、差の符号を直接確認する必要がある。

面積を求める判断手順

1. 2 関数の定義域と、考える区間での連続性を確認する。
2. $f(x)=g(x)$、すなわち$f(x)-g(x)=0$を解き、交点のx座標を求める。
3. 交点のx座標を小さい順に並べ、各開区間で$f(x)-g(x)$の符号を判定する。
4. 各区間で縦の長さを「上側−下側」として書く。
5. 各部分の定積分を計算し、非負の面積を加える。

三角関数では指定範囲内の交点をすべて拾う。絶対値を含む関数では絶対値の中が 0 になる点で式を分ける。無理関数では根号内条件、有理関数では分母が 0 にならないことを先に確認する。指数関数では導関数や凸性を用いると、交点の個数と上下関係を確定できることがある。

©ミライコーチング

例題

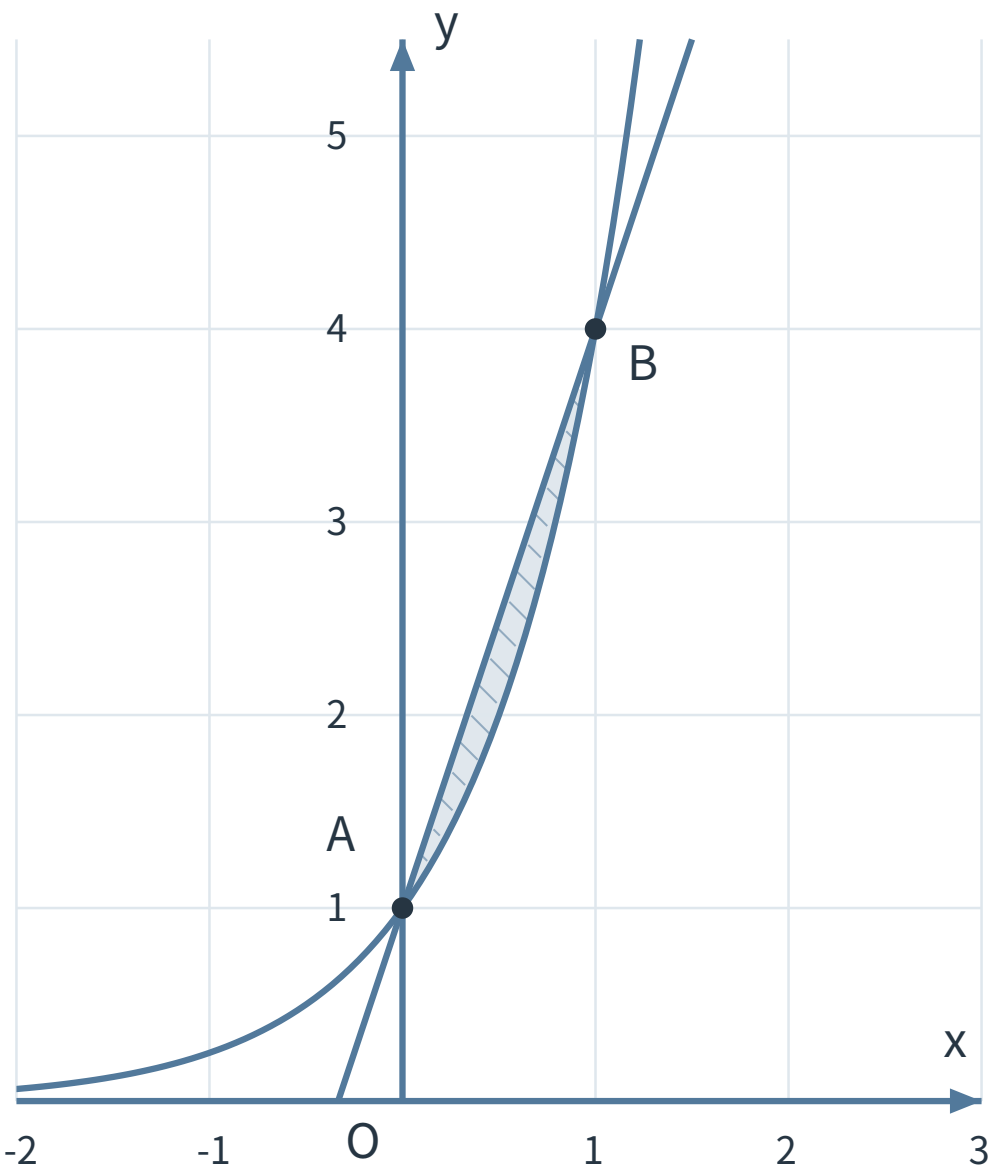

図 1　指数関数$y=4^x$と直線$y=3x+1$はいずれも実線で、$A(0,1)$、$B(1,4)$の間に領域を囲む

例題 1：指数関数と直線の 1 領域

曲線$y=4^x$と直線$y=3x+1$で囲まれた領域の面積を求めよ。

例題 1 の解答・解説

$x=0,1$では$4^x=3x+1$が成り立つため、平面上の交点として$A(0,1)$、$B(1,4)$が得られる。これら以外に交点がないことと、2 点の間での上下関係を確かめるため、

$$\phi(x)=4^x-3x-1$$

とおく。導関数は

$$\phi'(x)=(\ln 4)4^x-3,\qquad \phi''(x)=(\ln 4)^2 4^x>0$$

であるから、ϕ'は単調に増加する。また、$e<4<e^2$より$1<\ln 4<2$であるため、

$$\phi'(0)=\ln 4-3<0,\qquad \phi'(1)=4\ln 4-3>0$$

である。よって、ϕ'が 0 になる点は0と1の間にただ 1 つあり、ϕはその点まで減少し、その後は増加する。
$x<0$では$\phi'(x)<\phi'(0)<0$なので$\phi(x)>\phi(0)=0$であり、$x>1$では$\phi'(x)>\phi'(1)>0$なので$\phi(x)>\phi(1)=0$である。また、$0<x<1$では、ϕは$\phi(0)=\phi(1)=0$より下にある。したがって、交点のx座標は$0,1$だけであり、その間では$4^x<3x+1$となる。
よって、直線が上側、指数関数が下側であるから、面積は

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1\{3x+1-4^x\}\,dx\\&=\left[\frac{3x^2}{2}+x-\frac{4^x}{\ln 4}\right]_0^1\\&=\frac{5}{2}-\frac{3}{\ln 4}\end{aligned}$$

である。したがって、求める面積は$\frac{5}{2}-\frac{3}{\ln 4}$である。

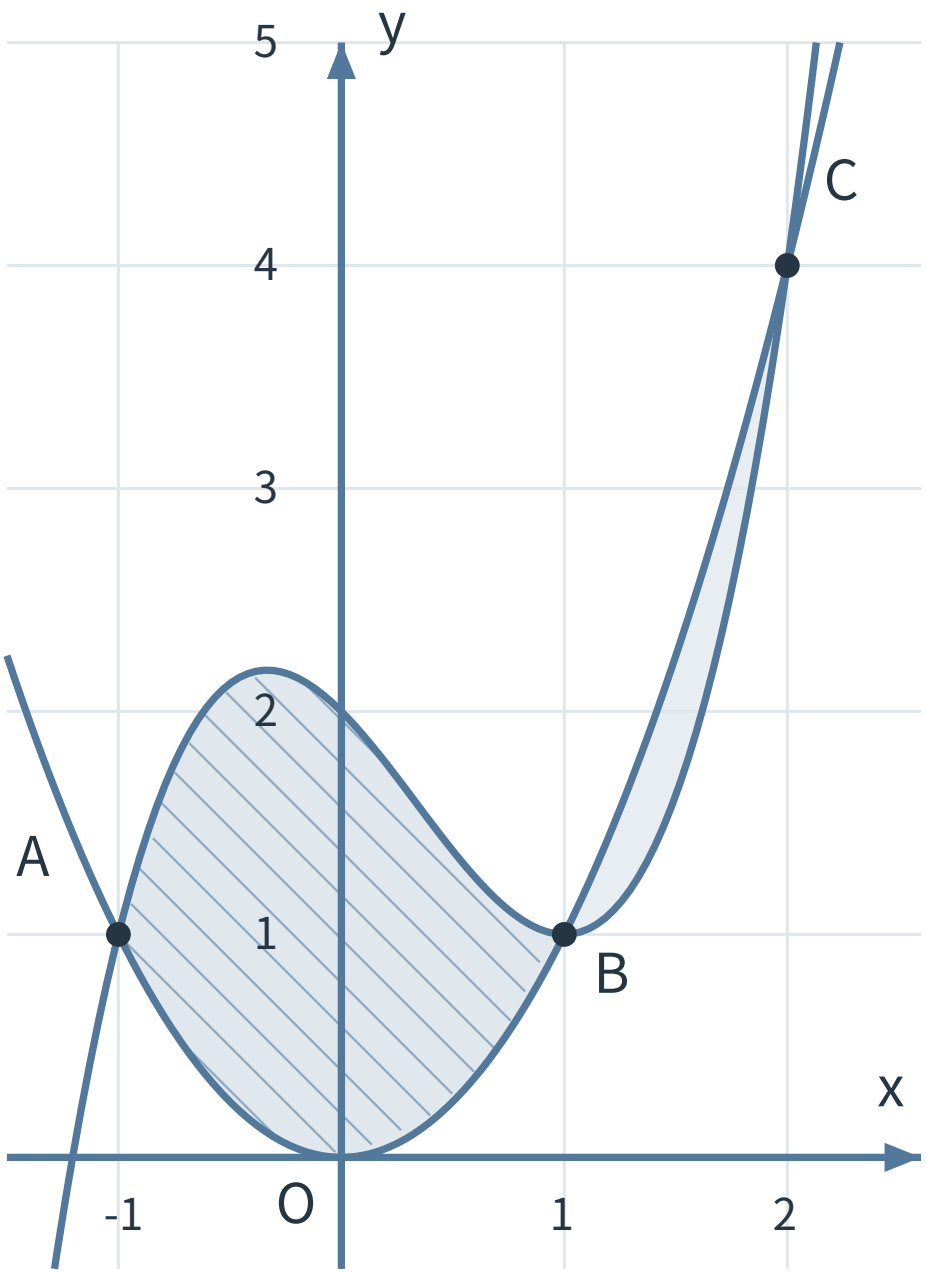

図 2　$f(x)=x^3-x^2-x+2$と$g(x)=x^2$はいずれも実線で 2 領域を作る。AからBではfが上、BからCではgが上

	x<-1	x=-1	-1<x<1	x=1	1<x<2	x=2	x>2
f(x)-g(x)	-	0	+	0	-	0	+

図 3　$f(x)-g(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$の符号表。正の区間では$f$が上、負の区間では$g$が上

©ミライコーチング

例題 2：3 交点と 2 領域

曲線$y = x^3 - x^2 - x + 2$と放物線$y = x^2$で囲まれたすべての有界領域の総面積を求めよ。

例題 2 の解答・解説

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$、$g(x) = x^2$とおく。差を因数分解すると、

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ &= (x+1)(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

となる。したがって、交点のx座標は$-1, 1, 2$であり、対応する平面上の交点は$A(-1, 1)$、$B(1, 1)$、$C(2, 4)$である。
符号表より、$-1 < x < 1$では$f(x) - g(x) > 0$なのでfが上側であり、$1 < x < 2$では$f(x) - g(x) < 0$なのでgが上側である。上下関係が変わる$x = 1$で積分を分ける。
差の原始関数を

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$$

とする。左側の領域の面積は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^{1} \left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right) dx \\ &= F(1) - F(-1) \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

である。右側では引く順序を逆にして、

$$\begin{aligned} S_2 &= -\int_{1}^{2} \left(x^3 - 2x^2 - x + 2\right) dx \\ &= -\{F(2) - F(1)\} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

となる。したがって、総面積は

$$S = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}$$

である。

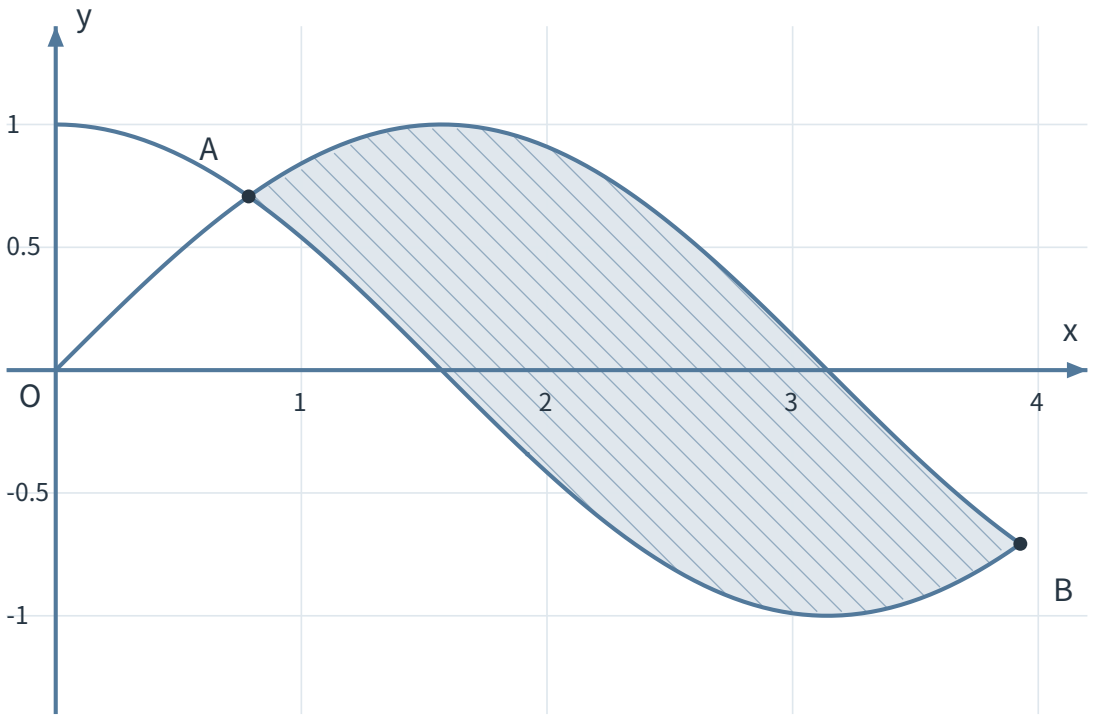

図 4　$y=\sin x$と$y=\cos x$はいずれも実線で、$x=\frac{\pi}{4}$から$x=\frac{5\pi}{4}$までに領域を囲む

例題 3：三角関数の 2 曲線

$0 \leq x \leq 2\pi$の範囲で、曲線$y=\sin x$と$y=\cos x$の交点$x=\frac{\pi}{4}$、$x=\frac{5\pi}{4}$の間に囲まれる領域の面積を求めよ。

例題 3 の解答・解説

交点の方程式は$\sin x = \cos x$である。差を変形すると、

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

となる。$0 \leq x \leq 2\pi$でこの差が 0 になるのは$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$である。対応する平面上の交点は

$$A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \qquad B\left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

である。$\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$では$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$なので、$\sin x > \cos x$である。
したがって、面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\, dx \\ &= \left[-\cos x - \sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \\ &= \sqrt{2} - \left(-\sqrt{2}\right) \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。求める面積は$2\sqrt{2}$である。

演習問題

演習 1：放物線と直線

放物線$y = x^2 - 2$と直線$y = -x + 4$で囲まれた領域の面積を求めよ。

演習 2：絶対値を含む曲線の 2 領域

2 曲線$y = |\,x\,|$と$y = x^2$で囲まれるすべての有界領域の総面積を求めよ。

演習 3：接点で分かれる 2 領域

曲線$y = x^4 - 2x^2 + 1$と直線$y = 1$で囲まれるすべての有界領域の総面積を求めよ。また、$x = 0$の前後で上下関係が変わるか説明せよ。

演習 4：無理関数と多項式

$x \geq 0$において、2 曲線$y = \sqrt{x}$と$y = x^3$で囲まれた領域の面積を求めよ。

©ミライコーチング

演習 5：2 つの有理関数

2 曲線

$$y = \frac{x}{x^2+1}, \qquad y = \frac{x^2}{x^2+1}$$

で囲まれた領域の面積を求めよ。

演習 6：三角関数の 4 領域

$0 \leq x \leq 2\pi$の範囲にある、2 曲線$y = \sin 2x$と$y = \sin x$の連続する交点間にできる 4 つの有界領域の総面積を求めよ。

演習 7：2 曲線への共通加算と面積不変

f, g, hは閉区間$[a, b]$で連続であり、$f(a) = g(a)$、$f(b) = g(b)$、$a < x < b$で$f(x) > g(x)$とする。曲線$y = f(x)$、$y = g(x)$が囲む領域と、曲線$y = f(x) + h(x)$、$y = g(x) + h(x)$が囲む領域は、交点のx座標と面積が同じであることを示せ。

演習 8：交点と上下交代の必要・十分

f, gはcを含む開区間で連続とする。
(1) ある$\delta > 0$があり、$c - \delta < x < c$で$f(x) > g(x)$、$c < x < c + \delta$で$f(x) < g(x)$が成り立つなら、$f(c) = g(c)$であることを示せ。
(2) $f(c) = g(c)$だけでは、cの前後で上下関係が変わるとは限らないことを、具体例で示せ。
(3) $f - g$が多項式で、cが$f - g$のm重根であるとする。mが奇数のときだけcの前後で上下関係が変わることを示せ。

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

交点の方程式は

$$x^2 - 2 = -x + 4$$

である。整理すると、

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) = 0$$

となるため、交点のx座標は$-3, 2$である。対応する平面上の交点は$(-3, 7)$、$(2, 2)$である。
直線から放物線を引いた差は

$$(-x+4) - (x^2 - 2) = -(x+3)(x-2)$$

であり、$-3 < x < 2$では正である。したがって、直線が上側である。

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{2} \left(-x^2 - x + 6\right) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-3}^{2} \\ &= \frac{125}{6} \end{aligned}$$

よって、求める面積は$\frac{125}{6}$である。

演習 2 の解答・解説

交点の方程式は$x^2 = |\,x\,|$である。$x \geq 0$では$x^2 = x$、$x < 0$では$x^2 = -x$となるため、交点のx座標は$-1, 0, 1$である。平面上の交点は$(-1, 1)$、$(0, 0)$、$(1, 1)$である。
$-1 < x < 0$では$|\,x\,| = -x > x^2$、$0 < x < 1$では$|\,x\,| = x > x^2$であるから、どちらの領域でも$y = |\,x\,|$が上側である。2 曲線はy軸について対称なので、総面積は

$$\begin{aligned} S &= 2\int_{0}^{1} \left(x - x^2\right) dx \\ &= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。$x = 0$は 2 領域が共有する交点であり、$y = |\,x\,|$はそこで微分不能なので接点とは呼ばない。また、$x = 0$の左右で上下関係は変わらない。

演習 3 の解答・解説

交点の方程式は

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 1$$

である。整理すると、

$$x^2(x^2 - 2) = 0$$

となるため、交点のx座標は$-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$である。平面上の交点は$\left(-\sqrt{2}, 1\right)$、$(0, 1)$、$\left(\sqrt{2}, 1\right)$である。
直線から曲線を引いた差は

$$1 - \left(x^4 - 2x^2 + 1\right) = x^2(2 - x^2)$$

である。この差は$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$で非負であり、$x = 0$以外では正である。したがって、$x = 0$は接点であり、その左右で上下関係は変わらない。
2 つの領域はy軸について対称なので、総面積は

$$S = 2\int_0^{\sqrt{2}} \left(2x^2 - x^4\right) dx$$

$$= 2\left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{15}$$

となる。各領域の面積は$\frac{8\sqrt{2}}{15}$である。

演習 4 の解答・解説

$y = \sqrt{x}$の定義域は$x \geq 0$である。交点の方程式$\sqrt{x} = x^3$について、$x = 0$は解である。$x > 0$では両辺を$\sqrt{x}$で割ると$x^{\frac{5}{2}} = 1$となるため、もう 1 つの解は$x = 1$である。平面上の交点は$(0, 0)$、$(1, 1)$である。
$0 < x < 1$では$x^{\frac{1}{2}} > x^3$なので、$y = \sqrt{x}$が上側である。したがって、

$$S = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^3\right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{5}{12}$$

となる。定義域の端点$x = 0$も 2 曲線の交点であり、積分区間の端点になる。

演習 5 の解答・解説

分母x^2+1はすべての実数で正なので、2 関数は実数全体で定義され連続である。交点の方程式は$x=x^2$であり、交点のx座標は$0,1$である。対応する平面上の交点は$(0,0)$、$\left(1,\frac{1}{2}\right)$である。
$0<x<1$では$x>x^2$であり、分母は正なので、$y=\frac{x}{x^2+1}$が上側である。差を

$$\frac{x-x^2}{x^2+1}=\frac{x}{x^2+1}-1+\frac{1}{x^2+1}$$

と変形する。
第 1 項は$u=x^2+1$と置くと$du=2x\,dx$であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx&=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u}\,du\\&=\frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

となる。第 3 項は$x=\tan t$と置く。$x=0,1$はそれぞれ$t=0,\frac{\pi}{4}$に対応し、

$$dx=\frac{1}{\cos^2 t}\,dt,\qquad 1+x^2=\frac{1}{\cos^2 t}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dt\\&=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\ln 2-\int_0^1 1\,dx+\frac{\pi}{4}\\&=\frac{1}{2}\ln 2-1+\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

である。

演習 6 の解答・解説

交点の方程式を差の形にすると、

$$\sin 2x - \sin x = 2\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}$$

$$= 0$$

となる。$0 \leq x \leq 2\pi$にある交点のx座標は

$$0,\quad \frac{\pi}{3},\quad \pi,\quad \frac{5\pi}{3},\quad 2\pi$$

である。差$h(x) = \sin 2x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1)$の符号は、これらの点で分けた 4 区間で順に$+, -, +, -$となる。
原始関数を

$$H(x) = -\frac{\cos 2x}{2} + \cos x$$

とする。各交点での値は

$$H(0) = \frac{1}{2},\quad H\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4},\quad H(\pi) = -\frac{3}{2},\quad H\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{3}{4},\quad H(2\pi) = \frac{1}{2}$$

である。したがって、4 つの面積は順に

$$S_1 = H\left(\frac{\pi}{3}\right) - H(0) = \frac{1}{4},$$

$$S_2 = -\left\{H(\pi) - H\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\} = \frac{9}{4},$$

$$S_3 = H\left(\frac{5\pi}{3}\right) - H(\pi) = \frac{9}{4},$$

$$S_4 = -\left\{H(2\pi) - H\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right\} = \frac{1}{4}$$

となる。よって、総面積は

$$S = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = 5$$

である。

©ミライコーチング

演習 7 の解答・解説

すべての$x \in [a,b]$について、

$$\{f(x)+h(x)\}-\{g(x)+h(x)\}=f(x)-g(x)$$

が成り立つ。したがって、

$$f(x)+h(x)=g(x)+h(x)$$

と$f(x)=g(x)$は同値であり、2 組の曲線の交点のx座標は同じである。また、$a<x<b$では$f(x)-g(x)>0$が保たれるので、上下関係も同じである。
新しい 2 曲線が囲む領域の面積は

$$\int_a^b \{f(x)+h(x)-g(x)-h(x)\}\,dx=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

となり、元の面積に等しい。共通加算が定数による上下移動に限らず、xごとに値が変わる$h(x)$でも成り立つのは、差の中で$h(x)$が完全に打ち消されるためである。
ただし、保存されるのは交点のx座標である。平面上の交点のy座標は一般に$h(x)$の分だけ変化する。

演習 8 の解答・解説

(1) $u(x)=f(x)-g(x)$とおく。f,gはcを含む開区間で連続なので、uも連続である。仮定よりcの左側では$u(x)>0$、右側では$u(x)<0$である。
もし$u(c)>0$なら、連続性によりcの右側の十分近い点でも$u(x)>0$となり、仮定に反する。もし$u(c)<0$なら、同様にcの左側の十分近い点でも$u(x)<0$となり、仮定に反する。したがって、$u(c)=0$である。よって、$f(c)=g(c)$である。
(2) $f(x)=x^2+1$、$g(x)=1$、$c=0$とする。このとき$f(0)=g(0)=1$であるが、$x\neq 0$では$f(x)>g(x)$である。したがって、$c=0$の前後で上下関係は変わらない。交点であることは上下交代の必要条件であるが、十分条件ではない。
(3) 多項式$u(x)=f(x)-g(x)$は、cがm重根であることから、

$$u(x)=(x-c)^m q(x),\qquad q(c)\neq 0$$

と表せる。qは連続で$q(c)\neq 0$なので、cの十分近くでは$q(x)$の符号は一定である。
一方、$(x-c)^m$はmが奇数ならcの左右で符号が変わり、mが偶数なら符号が変わらない。したがって、$u(x)=f(x)-g(x)$の符号がcの前後で変わるのは、mが奇数のとき、かつそのときに限る。
この結論は$f-g$が多項式である場合のものであり、一般の連続関数へ根の重複度という言葉を無条件に広げることはできない。