

第 37 講 条件から二次関数を決める

学習目標

- 与えられた条件に応じて、二次関数の表し方を選べる。
- 頂点と 1 点が分かるとき、 $y = a(x - p)^2 + q$ を使って二次関数を決められる。
- 2 つの x 切片と 1 点が分かるとき、 $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ を使って二次関数を決められる。
- 3 点を通るとき、 $y = ax^2 + bx + c$ に条件を代入して係数を求められる。

条件に合った形から始める

二次関数にはいくつかの表し方がある

二次関数を条件から決めるとき、いつも $y = ax^2 + bx + c$ から始める必要はありません。これまでに学んだ二次関数には、代表的に次の形があります。

- $y = a(x - p)^2 + q$
- $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$
- $y = ax^2 + bx + c$

どの形を使っても同じ二次関数を表せますが、与えられた条件によって使いやすさが違います。条件の中に頂点があれば頂点の形、 x 切片があれば因数分解された形、3 点が与えられたら一般形を使うと、未知数を少なくして考えられます。

条件と使いやすい形

条件に応じて、次の形を選ぶと便利です。

- 頂点 (p, q) が分かる
- x 切片が α, β と分かる
- 3 点を通ることが分かる

まず形を選び、そのあと残った未知係数を条件から決めます。

最初から未知数を増やしすぎない

頂点分かっているのに $y = ax^2 + bx + c$ とおくと、 a, b, c の 3 つを求める必要があります。一方、 $y = a(x - p)^2 + q$ とおけば、 p, q はすでに分かっているので、求めるのは a だけです。条件から二次関数を決めるときは、すでに分かっている情報を式の形に組み込むことが大切です。

頂点と 1 点から決める

頂点をそのまま式に入れる

頂点が $(2, -3)$ で、点 $(4, 5)$ を通る二次関数を考えます。頂点分かっているので、

$$y = a(x - 2)^2 - 3$$

とおきます。

点 $(4, 5)$ を通るので、 $x = 4$ 、 $y = 5$ を代入します。

$$5 = a(4 - 2)^2 - 3$$

整理すると $5 = 4a - 3$ なので、 $a = 2$ です。

したがって、

$$y = 2(x - 2)^2 - 3$$

と決まります。

頂点と 1 点から決める手順

頂点 (p, q) と、もう 1 点 (r, s) が分かっているときは、

1. $y = a(x - p)^2 + q$ とおく。
 2. 点 (r, s) を代入する。
 3. a を求める。
 4. 求めた a を式へ戻す。
- という順に進めます。

頂点の符号に注意する

頂点が $(-3, 2)$ のとき、

$$y = a(x + 3)^2 + 2$$

です。

頂点の x 座標が -3 だからといって、 $(x - 3)^2$ としないようにします。
かっこの中が 0 になる x が頂点の x 座標になることを確認します。

2 つの x 切片と 1 点から決める

x 切片では $y=0$ になる

グラフが x 軸と $x = 1, 3$ で交わるとします。

このとき、 $x = 1, 3$ で $y = 0$ になるので、

$$y = a(x - 1)(x - 3)$$

とおけます。

さらに点 $(0, 6)$ を通るなら、 $x = 0, y = 6$ を代入します。

$$6 = a(-1)(-3)$$

したがって、 $6 = 3a$ より $a = 2$ です。

よって、

$$y = 2(x - 1)(x - 3)$$

と決まります。

2 つの x 切片と 1 点から決める手順

x 切片が α, β のとき、

$$y = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

とおきます。

そのあと、もう 1 点の座標を代入して a を求めます。

x 切片と点の座標を区別する

「 x 切片が 2」というのは、グラフが点 $(2, 0)$ を通るという意味です。

x 切片が -4 なら因数は $x + 4$ です。

$x = -4$ のとき因数が 0 になる形を選びます。

3 点から決める

3 つの条件を a, b, c に対応させる

3 点 $(0, 1)$ 、 $(1, 2)$ 、 $(2, 5)$ を通る二次関数を考えます。

3 点が与えられているので、

$$y = ax^2 + bx + c$$

とおきます。

点 $(0, 1)$ を代入すると、

$$c = 1$$

です。

点 $(1, 2)$ を代入すると、

$$a + b + c = 2$$

です。

点 $(2, 5)$ を代入すると、

$$4a + 2b + c = 5$$

です。

$c = 1$ を使うと、

$$a + b = 1$$

$$2a + b = 2$$

となります。

2 つの式の差から $a = 1$ 、さらに $b = 0$ です。

したがって、

$$y = x^2 + 1$$

と決まります。

3 点から決める手順

3 点 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) を通るときは、

1. $y = ax^2 + bx + c$ とおく。
2. 3 点を 1 つずつ代入する。
3. 得られた 3 本の式から a, b, c を求める。
4. 元の式へ戻す。

と進めます。

条件式は 1 本ずつ丁寧に作る

点 $(2, 5)$ を $y = ax^2 + bx + c$ に代入すると、

$$5 = 4a + 2b + c$$

です。

x^2 の部分を $2a$ としてしまうミスに注意します。

座標を代入するときは、 x^2 、 x 、定数項を順に確認します。

求めた式は条件へ戻して検算する

すべての条件を満たすか確認する

条件から二次関数を求めた後は、与えられた条件をすべて満たしているか確認できます。

たとえば、

$$y = 2(x - 1)(x - 3)$$

なら、 $x = 1, 3$ のとき確かに $y = 0$ です。

また、 $x = 0$ のとき、

$$y = 2(-1)(-3) = 6$$

なので、点 $(0, 6)$ も通ります。

1つの条件だけでなく、与えられた条件すべてに戻して確認すると、符号や計算のミスを見つけやすくなります。

検算の基本

二次関数を決めたら、

- 頂点の条件
- x 切片の条件
- 通る点の条件

など、問題で与えられた条件をすべて確認します。

例題

例題 1

頂点が $(1, -2)$ で、点 $(3, 6)$ を通る二次関数を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

頂点が $(1, -2)$ なので、

$$y = a(x - 1)^2 - 2$$

とおきます。

点 $(3, 6)$ を代入すると、

$$6 = 4a - 2$$

です。

したがって、 $a = 2$ です。

よって、

$$y = 2(x - 1)^2 - 2$$

です。

例題 2

x 切片が $-1, 4$ で、点 $(0, -8)$ を通る二次関数を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

x 切片が $-1, 4$ なので、

$$y = a(x + 1)(x - 4)$$

とおきます。

点 $(0, -8)$ を代入すると、

$$-8 = a(1)(-4)$$

です。

したがって、 $a = 2$ です。

よって、

$$y = 2(x + 1)(x - 4)$$

です。

例題 3

3 点 $(0, 2)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(2, 4)$ を通る二次関数を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

$y = ax^2 + bx + c$ とおきます。

$(0, 2)$ を代入すると、

$$c = 2$$

です。

$(1, 1)$ を代入すると、

$$a + b + c = 1$$

です。

(2, 4) を代入すると、

$$4a + 2b + c = 4$$

です。

$c = 2$ より、

$$a + b = -1$$

$$2a + b = 1$$

となります。

差をとると $a = 2$ 、さらに $b = -3$ です。

したがって、

$$y = 2x^2 - 3x + 2$$

です。

例題 4

頂点が $(-2, 5)$ で、 y 切片が -3 である二次関数を求めなさい。

例題 4 の解答・解説

頂点が $(-2, 5)$ なので、

$$y = a(x + 2)^2 + 5$$

とおきます。

y 切片が -3 なので、点 $(0, -3)$ を通ります。

代入すると、

$$-3 = 4a + 5$$

です。

したがって、 $a = -2$ です。

よって、

$$y = -2(x + 2)^2 + 5$$

です。

演習問題

練習問題 1

頂点が $(2, 3)$ で、点 $(4, 11)$ を通る二次関数を求めなさい。

練習問題 2

頂点が $(-1, -4)$ で、点 $(1, 4)$ を通る二次関数を求めなさい。

練習問題 3

x 切片が $2, 5$ で、点 $(0, 20)$ を通る二次関数を求めなさい。

練習問題 4

x 切片が $-3, 1$ で、点 $(2, 10)$ を通る二次関数を求めなさい。

練習問題 5

3 点 $(0, 1)$ 、 $(1, 4)$ 、 $(2, 9)$ を通る二次関数を求めなさい。

練習問題 6

3 点 $(0, -1)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(2, 5)$ を通る二次関数を求めなさい。

練習問題 7

頂点が $(3, -1)$ で、 y 切片が 8 である二次関数を求めなさい。
求めた式が頂点と y 切片の条件を満たすことも確かめなさい。

練習問題 8

ある二次関数のグラフは x 軸と $x = -2, 3$ で交わり、点 $(1, -8)$ を通る。
この二次関数を求めなさい。

練習問題 9

ある生徒は、頂点が $(4, 2)$ で点 $(5, 5)$ を通る二次関数を求めるとき、

$$y = a(x + 4)^2 + 2$$

とおきました。
この式の置き方の誤りを説明し、正しい二次関数を求めなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

頂点が $(2, 3)$ なので、

$$y = a(x - 2)^2 + 3$$

とおきます。

点 $(4, 11)$ を代入すると $11 = 4a + 3$ です。

したがって、 $a = 2$ です。

よって、

$$y = 2(x - 2)^2 + 3$$

です。

練習問題 2 の解答・解説

頂点が $(-1, -4)$ なので、

$$y = a(x + 1)^2 - 4$$

とおきます。

点 $(1, 4)$ を代入すると $4 = 4a - 4$ です。

したがって、 $a = 2$ です。

よって、

$$y = 2(x + 1)^2 - 4$$

です。

練習問題 3 の解答・解説

x 切片が $2, 5$ なので、

$$y = a(x - 2)(x - 5)$$

とおきます。

点 $(0, 20)$ を代入すると $20 = 10a$ です。

したがって、 $a = 2$ です。

よって、

$$y = 2(x - 2)(x - 5)$$

です。

練習問題 4 の解答・解説

x 切片が $-3, 1$ なので、

$$y = a(x + 3)(x - 1)$$

とおきます。

点 $(2, 10)$ を代入すると $10 = 5a$ です。

したがって、 $a = 2$ です。

よって、

$$y = 2(x + 3)(x - 1)$$

です。

練習問題 5 の解答・解説

$y = ax^2 + bx + c$ とおきます。

$(0, 1)$ より、

$$c = 1$$

です。

$(1, 4)$ より、

$$a + b + c = 4$$

です。

$(2, 9)$ より、

$$4a + 2b + c = 9$$

です。

$c = 1$ を代入すると、

$$a + b = 3$$

$$2a + b = 4$$

となります。

したがって、 $a = 1$ 、 $b = 2$ です。

よって、

$$y = x^2 + 2x + 1$$

です。

練習問題 6 の解答・解説

$y = ax^2 + bx + c$ とおきます。

$(0, -1)$ より、

$$c = -1$$

です。

$(1, 0)$ より、

$$a + b + c = 0$$

です。

$(2, 5)$ より、

$$4a + 2b + c = 5$$

です。

$c = -1$ を代入すると、

$$a + b = 1$$

$$2a + b = 3$$

となります。

したがって、 $a = 2$ 、 $b = -1$ です。

よって、

$$y = 2x^2 - x - 1$$

です。

練習問題 7 の解答・解説

頂点が $(3, -1)$ なので、

$$y = a(x - 3)^2 - 1$$

とおきます。

y 切片が 8 なので、点 $(0, 8)$ を代入します。

$$8 = 9a - 1$$

より、 $a = 1$ です。

したがって、

$$y = (x - 3)^2 - 1$$

です。

$x = 3$ のとき $y = -1$ なので頂点の条件を満たします。

また、 $x = 0$ のとき $y = 8$ なので、 y 切片の条件も満たします。

練習問題 8 の解答・解説

x 切片が $-2, 3$ なので、

$$y = a(x + 2)(x - 3)$$

とおきます。

点 $(1, -8)$ を代入すると、

$$-8 = a(3)(-2)$$

です。

したがって、

$$a = \frac{4}{3}$$

です。

よって、

$$y = \frac{4}{3}(x + 2)(x - 3)$$

です。

練習問題 9 の解答・解説

頂点が $(4, 2)$ なら、かっこの中が 0 になるのは $x = 4$ でなければなりません。

したがって、正しくは、

$$y = a(x - 4)^2 + 2$$

とおきます。

点 $(5, 5)$ を代入すると $5 = a + 2$ です。

したがって、 $a = 3$ です。

よって、

$$y = 3(x - 4)^2 + 2$$

です。