

第 29 講 平方完成

学習目標

- $x^2 + bx$ を $(x + p)^2 + q$ の形へ変形できる。
- $x^2 + bx + c$ を平方完成できる。
- x^2 の係数が 1 でない二次式を $a(x - p)^2 + q$ の形へ変形できる。
- 平方完成した式を展開し、元の式と一致するか検算できる。

平方完成は「2 乗の形をつくる」式変形

目標となる形を先に見る

二次式

$$x^2 + 6x + 5$$

を考えます。

このままでは、 x を含む部分が x^2 と $6x$ に分かれています。

そこで、

$$(x + 3)^2$$

を展開してみると、 $x^2 + 6x + 9$ です。

元の式 $x^2 + 6x + 5$ と比べると、定数部分だけが 4 違います。

したがって、

$$x^2 + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 4$$

と変形できます。

このように、二次式をある 1 次式の 2 乗を含む形へ変形することを平方完成といいます。

平方完成

二次式を、

$$a(x - p)^2 + q$$

の形に変形することを平方完成といいます。

平方完成で見える場所

$x^2 + bx$ を平方完成するときは、 x の係数 b の半分に注目します。

たとえば $x^2 + 6x$ なら、6 の半分は 3 なので、 $(x + 3)^2$ をつくります。

$x^2 + bx$ を平方完成する

x の係数を半分にする理由

$(x + p)^2$ を展開すると、

$$(x + p)^2 = x^2 + 2px + p^2$$

です。

x の係数は $2p$ になります。

したがって、 $x^2 + bx$ と対応させるには $2p = b$ となればよく、 p は b の半分になります。

これが「 x の係数を半分にする」理由です。

$x^2 + 8x$ を平方完成する

8 の半分は 4 なので、 $(x + 4)^2$ を考えます。

$(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$ です。

したがって、

$$x^2 + 8x = (x + 4)^2 - 16$$

です。

足した 16 を、そのまま引いて調整しています。

基本手順

$x^2 + bx$ を平方完成するときは、

1. x の係数を半分にする。
2. その数を使って 2 乗の形をつくる。
3. 展開したときに余分に加わる定数を引く。

という順に進めます。

定数項がある場合

最後の定数を一緒に整理する

$x^2 + 4x + 7$ を平方完成します。

4 の半分は 2 なので、

$$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$$

です。

ここへ元の +7 を戻すと、

$$x^2 + 4x + 7 = (x + 2)^2 + 3$$

となります。

定数項は、2 乗の形をつくった後でまとめると整理しやすくなります。

半分にするのは x の係数

$x^2 + 10x + 3$ なら、半分にするのは 10 です。

10 の半分は 5 なので、 $(x + 5)^2$ をつくります。

定数項 3 を半分にするわけではありません。

x の係数が負の場合

符号も含めて半分にする

$x^2 - 6x + 2$ を考えます。

x の係数は -6 なので、その半分は -3 です。

したがって、 $(x - 3)^2$ をつくります。

$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$ なので、

$$x^2 - 6x + 2 = (x - 3)^2 - 7$$

です。
符号を無視して $(x+3)^2$ としないようにします。

x^2 の係数が 1 でない場合

最初に共通因数として外へ出す

次の二次式を考えます。

$$2x^2 + 8x + 3$$

x^2 と x の項から 2 をくくると、

$$2(x^2 + 4x) + 3$$

です。
かっこの中を平方完成すると、

$$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$$

なので、

$$2x^2 + 8x + 3 = 2\{(x + 2)^2 - 4\} + 3$$

です。
整理すると、

$$2x^2 + 8x + 3 = 2(x + 2)^2 - 5$$

となります。

係数が 1 でないときの手順

$ax^2 + bx + c$ を平方完成するときは、

1. x^2 と x の項から a をくくる。
2. かっこの中で平方完成する。
3. 外側の a を掛け戻す。
4. 定数項を整理する。

という順に進めます。

定数項まで一緒にくくらない

たとえば $2x^2 + 8x + 3$ で、2 をくくる対象は $2x^2 + 8x$ の部分です。
元の式を勝手に $2(x^2 + 4x + 3)$ とすると、定数項が 6 になってしまい、別の式になります。

分数が現れても同じ考え方

x の係数の半分をそのまま使う

$x^2 + 3x + 1$ を平方完成します。

3 の半分は $\frac{3}{2}$ なので、

$$x^2 + 3x = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

です。
したがって、

$$x^2 + 3x + 1 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

となります。

係数が奇数でも、手順そのものは変わりません。

平方完成したら展開して検算する

変形ミスを自分で見つける

平方完成では、符号や定数部分の計算ミスが起こりやすくなります。

そこで、完成した式を展開して元の式へ戻るか確認します。

たとえば、

$$3(x - 2)^2 + 1$$

を展開すると、

$$3(x^2 - 4x + 4) + 1$$

です。

さらに整理すると $3x^2 - 12x + 13$ です。

元の式が $3x^2 - 12x + 13$ なら、平方完成が正しかったと確認できます。

検算の方法

平方完成した後は、

完成した形を展開 → 同類項を整理 → 元の式と比較

と確認します。

x^2 の係数、 x の係数、定数項の 3 つがすべて一致すれば検算できます。

例題

例題 1

次の二次式を平方完成しなさい。

(1) $x^2 + 6x + 1$

(2) $x^2 - 8x + 3$

例題 1 の解答・解説

(1) 6 の半分は 3 です。

$$x^2 + 6x + 1 = (x + 3)^2 - 9 + 1$$

したがって、

$$x^2 + 6x + 1 = (x + 3)^2 - 8$$

です。

(2) -8 の半分は -4 です。

$$x^2 - 8x + 3 = (x - 4)^2 - 16 + 3$$

したがって、

$$x^2 - 8x + 3 = (x - 4)^2 - 13$$

です。

例題 2

二次式 $2x^2 - 12x + 5$ を平方完成しなさい。

例題 2 の解答・解説

x^2 と x の項から 2 をくくります。

$$2(x^2 - 6x) + 5$$

-6 の半分は -3 なので、 $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$ です。

したがって、

$$2\{(x - 3)^2 - 9\} + 5$$

となり、整理すると、

$$2(x - 3)^2 - 13$$

です。

例題 3

二次式 $3x^2 + 6x - 4$ を平方完成し、その結果を展開して検算しなさい。

例題 3 の解答・解説

x^2 と x の項から 3 をくくります。

$$3(x^2 + 2x) - 4$$

$x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$ なので、

$$3(x + 1)^2 - 7$$

です。

検算として展開すると、 $3(x^2 + 2x + 1) - 7 = 3x^2 + 6x - 4$ となります。

元の式と一致するので、平方完成は正しいと確認できます。

演習問題

練習問題 1

次の二次式を平方完成しなさい。

- (1) $x^2 + 10x + 4$
- (2) $x^2 - 4x + 9$

練習問題 2

次の二次式を平方完成しなさい。

- (1) $x^2 + 2x - 5$
- (2) $x^2 - 12x + 7$

練習問題 3

次の二次式を平方完成しなさい。

- (1) $2x^2 + 8x + 1$
- (2) $3x^2 - 12x + 2$

練習問題 4

次の二次式を平方完成しなさい。

- (1) $-x^2 + 6x + 2$
- (2) $-2x^2 - 8x + 3$

練習問題 5

次の二次式を平方完成しなさい。

- (1) $x^2 + 5x + 2$
- (2) $x^2 - 3x - 1$

練習問題 6

二次式 $4x^2 + 8x - 3$ を平方完成しなさい。

その後、完成した式を展開し、元の式と一致することを確認しなさい。

練習問題 7

次の変形のうち、正しいものをすべて選びなさい。

- (ア) $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$
- (イ) $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$
- (ウ) $x^2 + 8x = (x + 4)^2 + 16$
- (エ) $x^2 - 10x = (x - 5)^2 - 25$

練習問題 8

ある生徒は、

$$2x^2 + 12x + 5 = 2(x + 3)^2 + 5$$

と平方完成しました。

この変形が誤っている理由を説明し、正しく平方完成しなさい。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

(1) 10 の半分は 5 です。

$$x^2 + 10x + 4 = (x + 5)^2 - 25 + 4$$

したがって、 $(x + 5)^2 - 21$ です。

(2) -4 の半分は -2 です。

$$x^2 - 4x + 9 = (x - 2)^2 - 4 + 9$$

したがって、 $(x - 2)^2 + 5$ です。

練習問題 2 の解答・解説

(1) 2 の半分は 1 なので、 $x^2 + 2x - 5 = (x + 1)^2 - 6$ です。

(2) -12 の半分は -6 なので、 $x^2 - 12x + 7 = (x - 6)^2 - 29$ です。

練習問題 3 の解答・解説

(1) 2 をくくると $2(x^2 + 4x) + 1$ です。

$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$ なので、答えは $2(x + 2)^2 - 7$ です。

(2) 3 をくくると $3(x^2 - 4x) + 2$ です。

$x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$ なので、答えは $3(x - 2)^2 - 10$ です。

練習問題 4 の解答・解説

(1) -1 をくくると $-(x^2 - 6x) + 2$ です。

$x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$ なので、答えは $-(x - 3)^2 + 11$ です。

(2) -2 をくくると $-2(x^2 + 4x) + 3$ です。

$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$ なので、答えは $-2(x + 2)^2 + 11$ です。

練習問題 5 の解答・解説

(1) 5 の半分は $\frac{5}{2}$ です。

したがって、

$$x^2 + 5x + 2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$$

です。

(2) -3 の半分は $-\frac{3}{2}$ です。

したがって、

$$x^2 - 3x - 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

です。

練習問題 6 の解答・解説

4 をくくると $4(x^2 + 2x) - 3$ です。

$x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$ なので、平方完成すると $4(x + 1)^2 - 7$ です。

検算すると、 $4(x^2 + 2x + 1) - 7 = 4x^2 + 8x - 3$ となります。

元の式と一致します。

練習問題 7 の解答・解説

(ア) は正しいです。 $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ なので、9 を引けば元に戻ります。

(イ) は正しいです。 $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ です。

(ウ) は誤りです。余分に加わった 16 は引く必要があるので、正しくは $(x + 4)^2 - 16$ です。

(エ) は正しいです。 $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$ です。

したがって、正しいものは (ア)、(イ)、(エ) です。

練習問題 8 の解答・解説

x^2 と x の項から 2 をくくると、

$$2(x^2 + 6x) + 5$$

です。

$x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$ なので、

$$2\{(x + 3)^2 - 9\} + 5$$

となります。

したがって、正しい平方完成は $2(x + 3)^2 - 13$ です。

元の解答では、 $(x + 3)^2$ をつくるために加わった 9 の調整が抜けています。