

GOAL この講でできるようになること

- 乗法公式が分配法則による展開から導けることを説明できる。
- $(a+b)^2$ 、 $(a-b)^2$ 、 $(a+b)(a-b)$ を正しく展開できる。
- $(x+a)(x+b)$ の形を公式を使って展開できる。
- 式の形を見て、使える乗法公式を判断できる。
- 公式を忘れたとき、分配法則から作り直せる。

EXPLANATION / 解説 公式は新しいルールではない

前の講では、 $(x+2)(x+3)$ を分配法則によって展開しました。

$$\begin{aligned}(x+2)(x+3) &= x(x+3) + 2(x+3) \\ &= x^2 + 3x + 2x + 6 \\ &= x^2 + 5x + 6\end{aligned}$$

このような計算を何度も行くと、同じ形が繰り返し現れます。

乗法公式は、その繰り返しを短く計算するためにまとめたものです。

したがって、公式だけを別のルールとして覚える必要はありません。公式を忘れた場合でも、分配法則に戻れば必ず作り直せます。

EXPLANATION / 解説 $(x+a)(x+b)$ の形を見る

$(x+a)(x+b)$ を文字のまま展開してみます。

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= x(x+b) + a(x+b) \\ &= x^2 + bx + ax + ab \\ &= x^2 + (a+b)x + ab\end{aligned}$$

したがって、次の公式が得られます。

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

右辺の x の係数は $a+b$ 、定数項は ab です。

つまり、2つの数について**和が真ん中**、**積が最後**に現れます。

POINT $(x+a)(x+b)$ は和と積を見る

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

この形では、

- x^2 は最初どうしの積
 - $(a+b)x$ は外側と内側から出る2つの項の和
 - ab は最後どうしの積
- となります。

例えば、 $(x+3)(x+5)$ なら、 $3+5=8$ 、 $3 \cdot 5 = 15$ なので、 $x^2 + 8x + 15$ です。

EXPLANATION / 解説 同じ式を2回掛けると平方の公式になる

$(a+b)^2$ は、 $(a+b)(a+b)$ という意味です。

分配法則で展開すると、

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

したがって、

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

です。

真ん中の $2ab$ は突然現れたものではありません。展開すると ab が2回現れるため、 $ab + ab = 2ab$ となっています。

CAUTION / 注意 2乗をそれぞれに付けるだけではない

$(a+b)^2$ を $a^2 + b^2$ としてはいけません。

$(a+b)^2$ は $(a+b)(a+b)$ なので、展開すると真ん中に $2ab$ が現れます。

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

例えば、 $a=1$ 、 $b=2$ なら、左辺は $(1+2)^2 = 9$ です。一方、 $1^2 + 2^2 = 5$ なので一致しません。

この反例からも、真ん中の項を省けないことが分かります。

EXPLANATION / 解説 差の平方では真ん中が負になる

$(a-b)^2$ は、 $(a-b)(a-b)$ です。

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) \\ &= a^2 - ab - ab + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

したがって、

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

です。

最初と最後は2乗なので正になります。一方、真ん中には $-ab$ が2つ現れるため、 $-2ab$ となります。

EXPLANATION / 解説 和と差を掛けると真ん中が消える
($a+b$)($a-b$)を展開します。

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 - ab + ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

途中に現れる $-ab$ と $+ab$ が打ち消し合います。
したがって、

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

です。

この公式では、同じ2つの式で符号だけが反対になっていることが判断の目印です。

POINT 基本の乗法公式
次の4つの形を使います。

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= x^2 + (a+b)x + ab \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

公式を使う前に、元の式がどの形になっているかを確認します。
形が分からなくなった場合は、分配法則で展開すればよいので、公式の記憶だけに頼る必要はありません。

例題1 EXERCISE

乗法公式を使って、 $(x+4)(x+7)$ を展開しなさい。

ANSWER / 解答 例題1の解答・解説

$(x+a)(x+b)$ の形です。

$a=4$ 、 $b=7$ と見ると、 $a+b=11$ 、 $ab=28$ です。

したがって、

$$\begin{aligned}(x+4)(x+7) &= x^2 + (4+7)x + 4 \cdot 7 \\ &= x^2 + 11x + 28\end{aligned}$$

です。

この形では、括弧内の2つの数の和が x の係数、積が定数項になります。

例題2 EXERCISE

乗法公式を使って、 $(x+5)^2$ を展開しなさい。

ANSWER / 解答 例題2の解答・解説

$(a+b)^2$ の形です。

$a=x$ 、 $b=5$ とすると、

$$\begin{aligned}(x+5)^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 \\ &= x^2 + 10x + 25\end{aligned}$$

です。

$(x+5)^2 = x^2 + 25$ としてしまうと、真ん中の $10x$ が抜けます。平方の公式では、真ん中の項まで確認します。

例題3 EXERCISE

乗法公式を使って、 $(2x-3)^2$ を展開しなさい。

ANSWER / 解答 例題3の解答・解説

$(a-b)^2$ の形です。
 $a=2x$ 、 $b=3$ と考えます。

$$\begin{aligned}(2x-3)^2 &= (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot 3 + 3^2 \\ &= 4x^2 - 12x + 9\end{aligned}$$

したがって、展開すると $4x^2 - 12x + 9$ です。
最初の項は $(2x)^2 = 4x^2$ です。 $2x^2$ としないように注意します。

例題4 EXERCISE

乗法公式を使って、 $(3x+2)(3x-2)$ を展開しなさい。

ANSWER / 解答 例題4の解答・解説

$(a+b)(a-b)$ の形です。
 $a=3x$ 、 $b=2$ と考えると、

$$\begin{aligned}(3x+2)(3x-2) &= (3x)^2 - 2^2 \\ &= 9x^2 - 4\end{aligned}$$

です。
2つの括弧は $3x$ が共通で、もう一方が $+2$ と -2 になっています。このように同じ2つの式で符号だけが反対なら、真ん中の項が消える公式を使えます。

SECTION 1 演習問題

練習問題 1 EXERCISE

次の式を展開しなさい。

- (1) $(x+2)(x+6)$
- (2) $(x+3)(x-5)$
- (3) $(x-4)(x-7)$

練習問題 2 EXERCISE

次の式を展開しなさい。

- (1) $(x+3)^2$
- (2) $(x+8)^2$
- (3) $(2x+5)^2$

練習問題 3 EXERCISE

次の式を展開しなさい。

- (1) $(x-4)^2$
- (2) $(x-7)^2$
- (3) $(3x-2)^2$

練習問題 4 EXERCISE

次の式を展開しなさい。

- (1) $(x+6)(x-6)$
- (2) $(2x+3)(2x-3)$
- (3) $(5a+b)(5a-b)$

練習問題 5 EXERCISE

次の式を展開しなさい。

- (1) $(x-2)(x+9)$
- (2) $(x-6)(x+4)$
- (3) $(x-3)(x-8)$

練習問題 6 EXERCISE

次の式を展開しなさい。

- (1) $(2x+3)^2$
- (2) $(4x-1)^2$
- (3) $(3a+2b)^2$

練習問題 7 EXERCISE

次の式を、できるだけ短い計算で展開しなさい。

- (1) $(x+11)(x-11)$
- (2) $(2x+7)^2$
- (3) $(3x+4)(3x-4)$

練習問題 8 EXERCISE

ある生徒が $(x-5)^2$ を次のように計算しました。

$$(x-5)^2 = x^2 - 25$$

この計算の誤りを説明し、正しく展開しなさい。

SECTION 2 演習問題の解答・解説

ANSWER / 解答 練習問題 1 の解答・解説

(1) $(x+a)(x+b)$ の形で、 $a=2$ 、 $b=6$ です。

$$\begin{aligned}(x+2)(x+6) &= x^2 + (2+6)x + 2 \cdot 6 \\ &= x^2 + 8x + 12\end{aligned}$$

(2) $a=3$ 、 $b=-5$ と考えます。

$$\begin{aligned}(x+3)(x-5) &= x^2 + (3-5)x + 3 \cdot (-5) \\ &= x^2 - 2x - 15\end{aligned}$$

(3) $a=-4$ 、 $b=-7$ と考えます。

$$\begin{aligned}(x-4)(x-7) &= x^2 + (-4-7)x + (-4)(-7) \\ &= x^2 - 11x + 28\end{aligned}$$

負の数を含む場合も、2つの数の和と積を見る考え方は変わりません。

ANSWER / 解答 練習問題 2 の解答・解説

(1)

$$\begin{aligned}(x+3)^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 \\ &= x^2 + 6x + 9\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(x+8)^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 8 + 8^2 \\ &= x^2 + 16x + 64\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(2x+5)^2 &= (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 5 + 5^2 \\ &= 4x^2 + 20x + 25\end{aligned}$$

平方の公式では、「最初の2乗、2つの積の2倍、最後の2乗」という3項が現れます。

ANSWER / 解答 練習問題 3 の解答・解説

(1)

$$\begin{aligned}(x-4)^2 &= x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 \\ &= x^2 - 8x + 16\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(x-7)^2 &= x^2 - 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 \\ &= x^2 - 14x + 49\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(3x-2)^2 &= (3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot 2 + 2^2 \\ &= 9x^2 - 12x + 4\end{aligned}$$

差の平方では、最後の項まで負になるわけではありません。最後は b^2 なので正です。

ANSWER / 解答 練習問題 4 の解答・解説

(1) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ を使います。

$$(x+6)(x-6) = x^2 - 36$$

(2)

$$\begin{aligned}(2x+3)(2x-3) &= (2x)^2 - 3^2 \\ &= 4x^2 - 9\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(5a+b)(5a-b) &= (5a)^2 - b^2 \\ &= 25a^2 - b^2\end{aligned}$$

この形では真ん中の項が打ち消し合うため、答えは2項だけになります。

ANSWER / 解答 練習問題 5 の解答・解説

(1) -2 と 9 の和は 7 、積は -18 です。

$$(x-2)(x+9) = x^2 + 7x - 18$$

(2) -6 と 4 の和は -2 、積は -24 です。

$$(x-6)(x+4) = x^2 - 2x - 24$$

(3) -3 と -8 の和は -11 、積は 24 です。

$$(x-3)(x-8) = x^2 - 11x + 24$$

$(x+a)(x+b)$ の形では、符号を含めて $a+b$ と ab を計算します。

ANSWER / 解答 練習問題 6 の解答・解説

(1)

$$\begin{aligned}(2x+3)^2 &= (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 3 + 3^2 \\ &= 4x^2 + 12x + 9\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(4x-1)^2 &= (4x)^2 - 2 \cdot (4x) \cdot 1 + 1^2 \\ &= 16x^2 - 8x + 1\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(3a+2b)^2 &= (3a)^2 + 2 \cdot (3a)(2b) + (2b)^2 \\ &= 9a^2 + 12ab + 4b^2\end{aligned}$$

文字が 2 種類になっても公式の構造は同じです。 a や b の位置には、数だけでなく単項式も入ります。

ANSWER / 解答 練習問題 7 の解答・解説

(1) 和と差の積になっています。

$$(x+11)(x-11) = x^2 - 121$$

(2) 和の平方になっています。

$$\begin{aligned}(2x+7)^2 &= (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 7 + 7^2 \\ &= 4x^2 + 28x + 49\end{aligned}$$

(3) 和と差の積になっています。

$$\begin{aligned}(3x+4)(3x-4) &= (3x)^2 - 4^2 \\ &= 9x^2 - 16\end{aligned}$$

毎回 4 回の掛け算をすることもできますが、式の形が公式と一致しているときは公式を使うと計算を短くできます。

ANSWER / 解答 練習問題 8 の解答・解説

$(x-5)^2$ を $x^2 - 25$ とした点が誤りです。
 $x^2 - 25$ になるのは $(x+5)(x-5)$ のような和と差の積です。
 一方、

$$(x-5)^2 = (x-5)(x-5)$$

なので、差の平方の公式を使います。

$$\begin{aligned}(x-5)^2 &= x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 \\ &= x^2 - 10x + 25\end{aligned}$$

したがって、正しく展開すると $x^2 - 10x + 25$ です。

平方の形と和と差の積は見た目が似ていますが、 $(a-b)^2$ と $(a+b)(a-b)$ は別の形です。公式を選ぶ前に、括弧が同じか、符号だけが反対かを確認します。