

第 149 講 等比型の漸化式

学習目標

この講では、等比型の漸化式 $a_{n+1} = ra_n$ が表す変化の仕組みを理解し、初項から一般項を求められるようになることを目標とする。

具体的には、次のことができるようになる。

- 一定の倍率で変化する数列を漸化式で表すことができる。
- $r \neq 0$ のとき、 $a_n = a_1 r^{n-1}$ を導出し、利用できる。
- 倍率が負の場合や分数の場合でも、符号や大きさの変化を判断できる。
- $r = 0$ の場合を特別に扱い、 0^0 を用いずに考えることができる。

等比型の漸化式

数列 $\{a_n\}$ において、ある一定の実数 r があり、正整数 n について常に

$$a_{n+1} = ra_n$$

が成り立つとき、この更新式を等比型の漸化式という。

ここで、 n は正整数、初項 a_1 は実数、倍率 r は n によらない一定の実数である。

等比型の漸化式は、「次の項が現在の項の一定倍率になる」という規則を表している。

倍率を何回掛けるかを見る

漸化式 $a_{n+1} = ra_n$ では、1 つ先へ進むたびに r を 1 回掛ける。

初項から順に見ると、

$$a_2 = ra_1$$

$$a_3 = ra_2 = a_1 r^2$$

$$a_4 = ra_3 = a_1 r^3$$

となる。

第 n 項へ進むには、初項から $n - 1$ 回更新する必要がある。したがって、 $r \neq 0$ のとき、

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

となる。

この式を候補として $b_n = a_1 r^{n-1}$ とおくと、 $b_1 = a_1 r^0 = a_1$ であり、 $b_{n+1} = a_1 r^n = r(a_1 r^{n-1}) = rb_n$ となる。

つまり、初項と更新規則の両方を満たしている。漸化式では初項と全ての正整数 n に対する更新規則によって各項が順に一意に定まるため、この候補式は一般項である。

使う条件

等比型の漸化式で一般項を求めるときは、次の 2 点を確認する。

- 更新式が $a_{n+1} = ra_n$ の形になっていること。
- 倍率 r を何回掛けるかを数えること。

ただし、 $r = 0$ の場合は $a_n = a_1 r^{n-1}$ をそのまま使わない。 0^0 を考える必要が生じるため、第 1 項と第 2 項以降を分けて考える。

等比数列との区別

第 141 講では、非零の項どうしの比によって等比数列を定義した。

一方、この講の漸化式 $a_{n+1} = ra_n$ は、零を含む場合も含めて「次の項へ進む倍率」を表している。

例えば、初項が 0 である場合は全ての項が 0 になる。このような場合でも、更新式による変化として扱うため、「隣接する項の比」だけで判断しないことが重要である。

倍率による変化の種類

倍率 r による数列の変化は、初項が 0 かどうかで分けて考える。

初項 $a_1 = 0$ のとき、 $a_n = 0$

がすべての正整数 n で成り立つ。

この場合は零列であり、符号交代や絶対値の増減は起こらない。

初項 $a_1 \neq 0$ のときは、倍率の絶対値を見る。

- $|r| > 1$ のとき、各項の絶対値は大きくなる。
- $0 < |r| < 1$ のとき、各項の絶対値は小さくなる。
- $|r| = 1$ のとき、各項の絶対値は一定である。

さらに、符号の変化は r の符号で決まる。

- $r > 0$ のとき、符号は変化しない。
- $r < 0$ のとき、符号は交互に変化する。

特に、 $r = 1$ のときは初項のまま一定であり、 $r = -1$ のときは符号だけが交互に変化して大きさは一定である。

また、 $r = 0$ のときは、初項が 0 でない場合でも第 2 項以降はすべて 0 になる。

例題 1

数列 $\{a_n\}$ が漸化式 $a_{n+1} = 3a_n$ を満たし、初項が $a_1 = 2$ であるとする。
一般項 a_n を求めよ。

例題 1 の解答・解説

倍率は $r = 3$ 、初項は $a_1 = 2$ である。

第 n 項では、初項から $n - 1$ 回倍率を掛けるため、 $a_n = a_1 r^{n-1}$ を用いる。

したがって、 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ である。

検算すると、 $a_1 = 2 \cdot 3^0 = 2$ となり、初項に一致する。

また、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot 3^n}{2 \cdot 3^{n-1}} = 3$$

より、更新式 $a_{n+1} = 3a_n$ も満たしている。

例題 2

数列 $\{a_n\}$ が漸化式 $a_{n+1} = -2a_n$ を満たし、初項が $a_1 = 3$ であるとする。
一般項 a_n を求め、数列の符号の変化を説明せよ。

例題 2 の解答・解説

倍率は $r = -2$ 、初項は $a_1 = 3$ である。

したがって、 $a_n = a_1 r^{n-1}$ より、 $a_n = 3(-2)^{n-1}$ である。

倍率が負であるため、1 回倍率を掛けるたびに符号が反転する。

実際に、 $a_1 = 3$ 、 $a_2 = -6$ 、 $a_3 = 12$ 、 $a_4 = -24$ となり、正負が交互に現れる。

検算すると、初項について

$a_1 = 3(-2)^0 = 3$ となり、初項条件を満たす。

さらに、 $-2a_n = 3(-2)^n = a_{n+1}$ であるため、更新式も成立する。

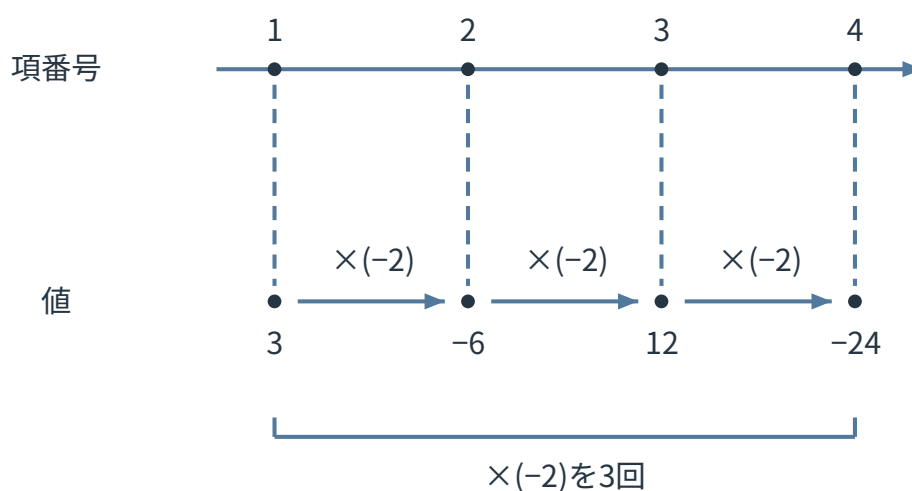


図 1 初項 3、倍率 -2 と定めた数列である。3 回の更新後の第 4 項の値は -24 となり、この例では正負が交代する。上段は項番号、下段は値の大小を距離で表さない対応列である。

例題 3

数列 $\{a_n\}$ は等比型の漸化式 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ を満たす。

第 3 項が $a_3 = 12$ であるとき、初項 a_1 と一般項 a_n を求めよ。

例題 3 の解答・解説

倍率は $r = \frac{1}{2}$ である。

第 3 項は初項から 2 回倍率を掛けた項なので、 $a_3 = a_1 r^2$ である。

条件より、

$$12 = a_1 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

となる。

したがって、

$$12 = \frac{a_1}{4}$$

より、 $a_1 = 48$ である。

一般項は、

$$a_n = 48 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

となる。

検算すると、

$$a_3 = 48 \left(\frac{1}{2} \right)^2 = 12$$

であり、第 3 項の条件を満たす。

さらに、初項は

$$a_1 = 48 \left(\frac{1}{2} \right)^0 = 48$$

であり、全ての正整数 n について

$$\frac{1}{2}a_n = 48 \left(\frac{1}{2} \right)^n = a_{n+1}$$

が成り立つため、既知項と更新条件の両方を満たす。

演習問題

練習問題 1

数列 $\{a_n\}$ が

$a_{n+1} = 4a_n$ を満たし、 $a_1 = 5$ である。

一般項 a_n を求めよ。

練習問題 2

数列 $\{a_n\}$ が

$a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n$ を満たし、 $a_1 = 18$ である。

一般項 a_n を求め、項の符号がどのように変化するか説明せよ。

練習問題 3

数列 $\{a_n\}$ が

$a_{n+1} = a_n$ を満たし、 $a_1 = -7$ である。

一般項 a_n を求めよ。

練習問題 4

数列 $\{a_n\}$ が

$a_{n+1} = 0 \cdot a_n$ を満たし、 $a_1 = 6$ である。

一般項 a_n を求めよ。

練習問題 5

数列 $\{a_n\}$ が

$a_{n+1} = 5a_n$ を満たす。

$a_4 = 250$ のとき、初項 a_1 と一般項 a_n を求めよ。

練習問題 6

数列 $\{a_n\}$ が

$a_{n+1} = -2a_n$ を満たし、 $a_1 = 0$ である。

一般項 a_n を求めよ。また、隣接する項の比から倍率を決めることができるか説明せよ。

練習問題 7

次の候補のうち、数列 $\{a_n\}$ が

$a_{n+1} = 3a_n$ を満たし、 $a_1 = 2$ である条件を満たすものを選べ。

- (1) $a_n = 2 \cdot 3^n$
- (2) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
- (3) $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$

練習問題 8

数列 $\{a_n\}$ が

$a_{n+1} = \frac{2}{5}a_n$ を満たし、 $a_3 = 20$ である。

初項 a_1 と一般項 a_n を求めよ。

練習問題 1 の解答・解説

倍率は $r = 4$ 、初項は $a_1 = 5$ である。

第 n 項では初項から $n - 1$ 回倍率を掛けるため、 $a_n = a_1 r^{n-1}$ を使う。

したがって、 $a_n = 5 \cdot 4^{n-1}$ である。

検算すると、 $a_1 = 5 \cdot 4^0 = 5$ となり、初項に一致する。

また、 $4a_n = 4 \cdot 5 \cdot 4^{n-1} = 5 \cdot 4^n = a_{n+1}$ であるため、全ての正整数 n で更新式を満たす。

練習問題 2 の解答・解説

倍率は $r = -\frac{1}{3}$ 、初項は $a_1 = 18$ である。

したがって、 $a_n = a_1 r^{n-1}$ より、

$$a_n = 18 \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

である。

倍率が負であるため、1 回倍率を掛けるたびに符号が反転する。

実際に、 $a_1 = 18$, $a_2 = -6$, $a_3 = 2$ となる。

検算すると、

$$a_1 = 18 \left(-\frac{1}{3} \right)^0 = 18$$

であり、初項条件を満たす。

さらに、

$$-\frac{1}{3}a_n = 18 \left(-\frac{1}{3} \right)^n = a_{n+1}$$

であるため、更新条件も満たす。

練習問題 3 の解答・解説

倍率は $r = 1$ 、初項は $a_1 = -7$ である。

したがって、 $a_n = a_1 r^{n-1}$ より、 $a_n = -7 \cdot 1^{n-1}$ となる。

1 を何回掛けても値は変化しないため、 $a_n = -7$ である。

検算すると、 $a_1 = -7$ であり、また、 $a_{n+1} = -7 = a_n$ となるため、全ての正整数 n で更新式を満たす。

練習問題 4 の解答・解説

倍率は $r = 0$ である。

第 2 項以降は更新式によって、 $a_2 = 0a_1 = 0$ となる。

さらに、 $a_3 = 0a_2 = 0$

以降もすべて 0 である。

したがって、 $a_1 = 6$, $a_n = 0$ ($n \geq 2$) である。

第 1 項で 0^0 が現れる形は用いず、第 1 項と第 2 項以降を分けて表した。

検算すると、第 1 項は 6 であり、第 2 項以降は更新式によって 0 になるため、条件を満たす。

練習問題 5 の解答・解説

倍率は $r = 5$ である。

第 4 項は初項から 3 回倍率を掛けた項なので、 $a_4 = a_1 r^3$ である。

条件より、 $250 = a_1 \cdot 5^3$ となる。

したがって、 $250 = 125a_1$ より、 $a_1 = 2$ である。

一般項は、 $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$ となる。

検算すると、 $a_4 = 2 \cdot 5^3 = 250$ であり、既知項の条件を満たす。

また、 $5a_n = 2 \cdot 5^n = a_{n+1}$ なので、更新式も全ての正整数 n で成立する。

練習問題 6 の解答・解説

倍率は $r = -2$ 、初項は $a_1 = 0$ である。

一般項は、 $a_n = a_1 r^{n-1}$

の形から考えると、 $a_n = 0 \cdot (-2)^{n-1}$ となるため、全ての項が 0 である。

したがって、 $a_n = 0$ である。

検算すると、 $a_1 = 0$ であり、 $-2a_n = 0 = a_{n+1}$ となるため、更新式を満たす。

ただし、隣接する項の比

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

は分母が 0 になるため定められない。

初項 0 の場合、どの実数の倍率でも零列になるため、隣接比から倍率を決めることはできない。

練習問題 7 の解答・解説

条件を満たすには、初項条件 $a_1 = 2$ と更新条件 $a_{n+1} = 3a_n$ の両方を確認する必要がある。

(1) の場合、 $a_{n+1} = 2 \cdot 3^{n+1}$

また、 $3a_n = 3(2 \cdot 3^n) = 2 \cdot 3^{n+1}$ なので更新条件は満たす。

しかし、 $a_1 = 2 \cdot 3^1 = 6$ となり、初項条件を満たさない。

(2) の場合、 $a_1 = 2 \cdot 3^0 = 2$ となり、初項条件を満たす。

さらに、 $3a_n = 3(2 \cdot 3^{n-1}) = 2 \cdot 3^n = a_{n+1}$ であるため、更新条件も満たす。

(3) の場合、 $a_1 = 2 \cdot 2^0 = 2$ となり、初項条件は満たす。

しかし、 $a_{n+1} = 2 \cdot 2^n$ である一方、 $3a_n = 3(2 \cdot 2^{n-1})$ となり一致しない。

これは倍率が 2 であり、必要な倍率 3 とは異なるためである。

したがって、初項条件と更新条件の両方を満たすのは (2) の

$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ である。

練習問題 8 の解答・解説

倍率は $r = \frac{2}{5}$ である。

第 3 項は初項から 2 回倍率を掛けた項なので、 $a_3 = a_1 r^2$ である。

条件より、

$$20 = a_1 \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

となる。

したがって、

$$20 = a_1 \frac{4}{25}$$

より、 $a_1 = 125$ である。

一般項は、

$$a_n = 125 \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

となる。

検算すると、

$$a_3 = 125 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 20$$

であり、既知項の条件を満たす。
また、

$$\frac{2}{5}a_n = 125\left(\frac{2}{5}\right)^n = a_{n+1}$$

なので、全ての正整数 n で更新式が成立する。