

第 96 講 2 つの円の位置関係

学習目標

- 2 つの円の中心間距離と半径を比べ、共有点の個数を判断できる。
- 外接・内接を、中心間距離と半径の関係を使って区別できる。
- 円の方程式から中心と半径を読み取り、2 つの円の位置関係を判定できる。

1. 2 つの円の位置関係を決めるもの

見るべきものは中心間距離である

2 つの円がどのように位置するかを考えると、円の方程式をいきなり連立する必要はない。大きい方の円の半径を R 、小さい方の円の半径を r とし、 $R \geq r > 0$ とする。また、2 つの中心の間の距離を d とする。

このとき比較する量は、次の 3 つである。

- 中心間距離 d
- 半径の和 $R + r$
- 半径の差 $R - r$

半径の和 $R + r$ は、2 つの円が外側から近づいてちょうど接する境界を表す。

半径の差 $R - r$ は、小さい円が大きい円の内部でちょうど接する境界を表す。

したがって、2 つの円の位置関係は d を $R + r$ 、 $R - r$ と比較すれば判断できるのである。

位置関係を決める基本判定

$R \geq r > 0$ とすると、中心間距離 d によって次のように決まる。

条件	位置関係	共有点の個数
$d > R + r$	外部で離れている	0 個
$d = R + r$	外接する	1 個
$R - r < d < R + r$	2 点で交わる	2 個
$d = R - r$ かつ $R > r$	内接する	1 個
$0 \leq d < R - r$	一方が他方の内部にあり、離れている	0 個

ただし、 $d = 0$ かつ $R = r$ のときは 2 つの円が一致し、共有点は無数にある。

2. 5 つの基本的な位置関係

外部で離れている場合

中心間距離が半径の和より大きい場合

中心を $O(0, 0)$ 、 $C(5, 0)$ 、半径をそれぞれ 3、1 とする。

中心間距離は $d = 5$ 、半径の和は $3 + 1 = 4$ であるから、 $d > R + r$ である。したがって、2 つの円は外部で離れており、共有点はない。

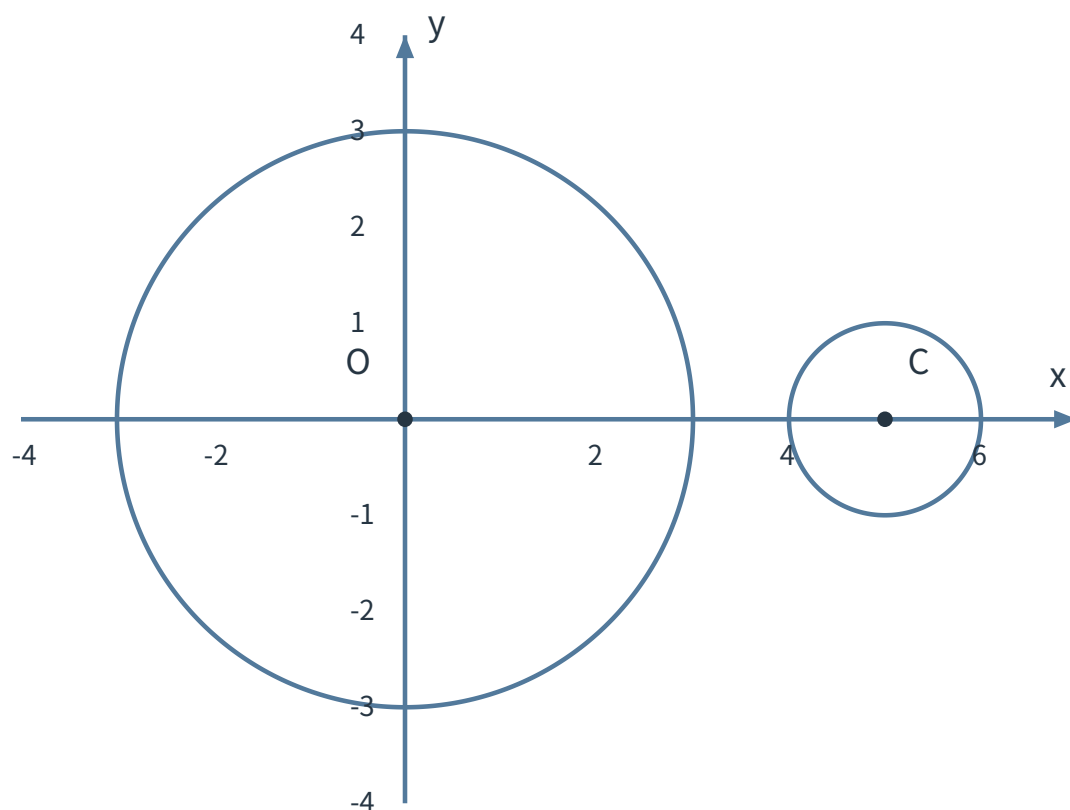


図1 外部で離れている2つの円

外接する場合

中心間距離が半径の和に等しい場合

中心を $O(0,0)$ 、 $C(4,0)$ 、半径をそれぞれ 3、1 とする。

$d = 4$ かつ $R + r = 3 + 1 = 4$ であるから、 $d = R + r$ である。2つの円は点 $T(3,0)$ で外接する。

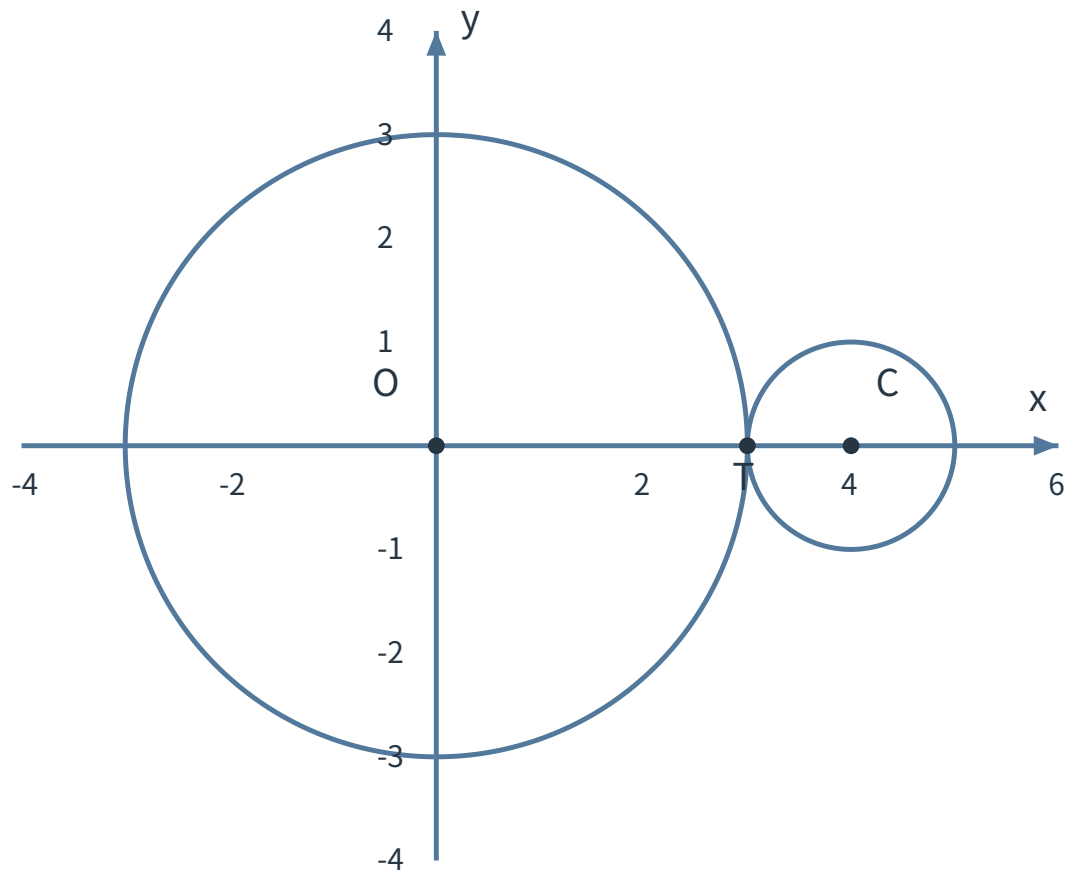


図2 1点で外接する2つの円

2点で交わる場合

半径の差と和の間に中心間距離がある場合

中心を $O(0,0)$ 、 $C(3,0)$ 、半径をそれぞれ 3、1 とする。

半径の差は $R - r = 2$ 、半径の和は $R + r = 4$ であり、中心間距離は $d = 3$ である。

したがって、 $R - r < d < R + r$ が成り立つので、2つの円は2点で交わる。

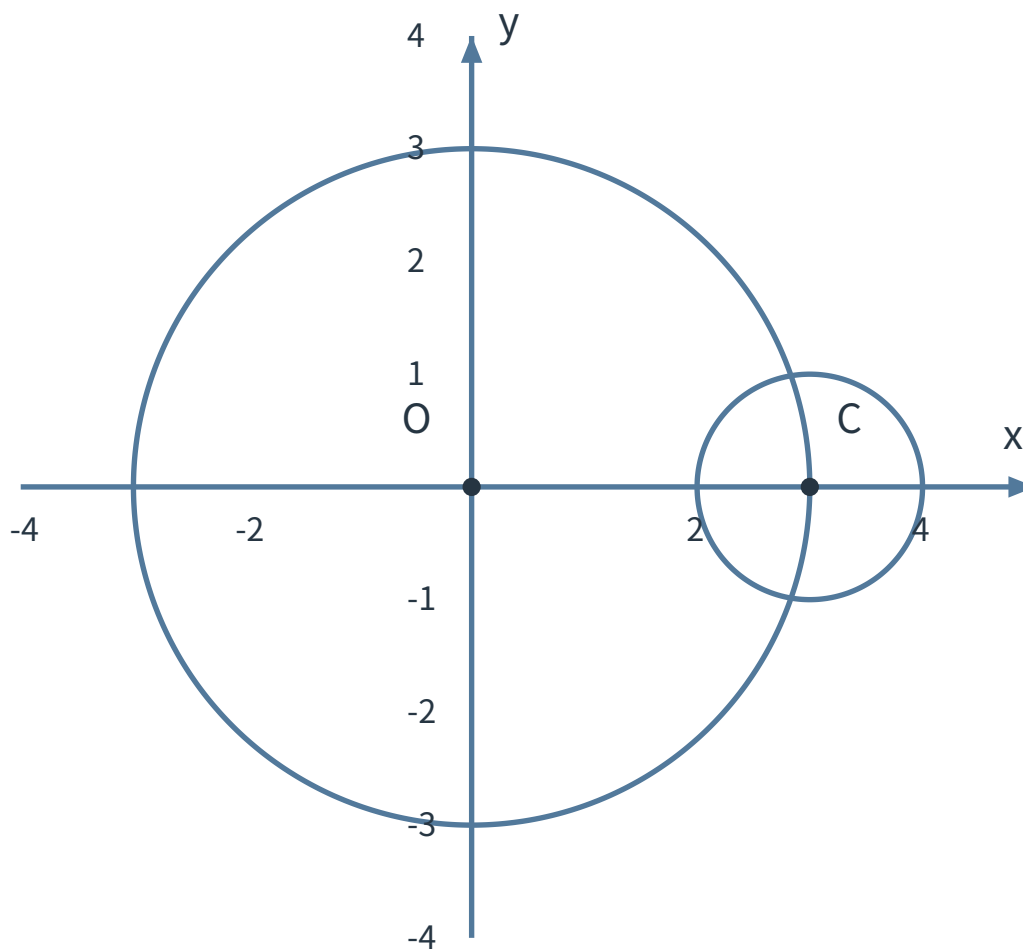


図3 2点で交わる2つの円

内接する場合

中心間距離が半径の差に等しい場合

中心を $O(0,0)$ 、 $C(2,0)$ 、半径をそれぞれ 3、1 とする。

$d = 2$ かつ $R - r = 3 - 1 = 2$ であるから、 $d = R - r$ である。小さい円は大きい円の内側から点 $T(3,0)$ で接する。これを内接という。

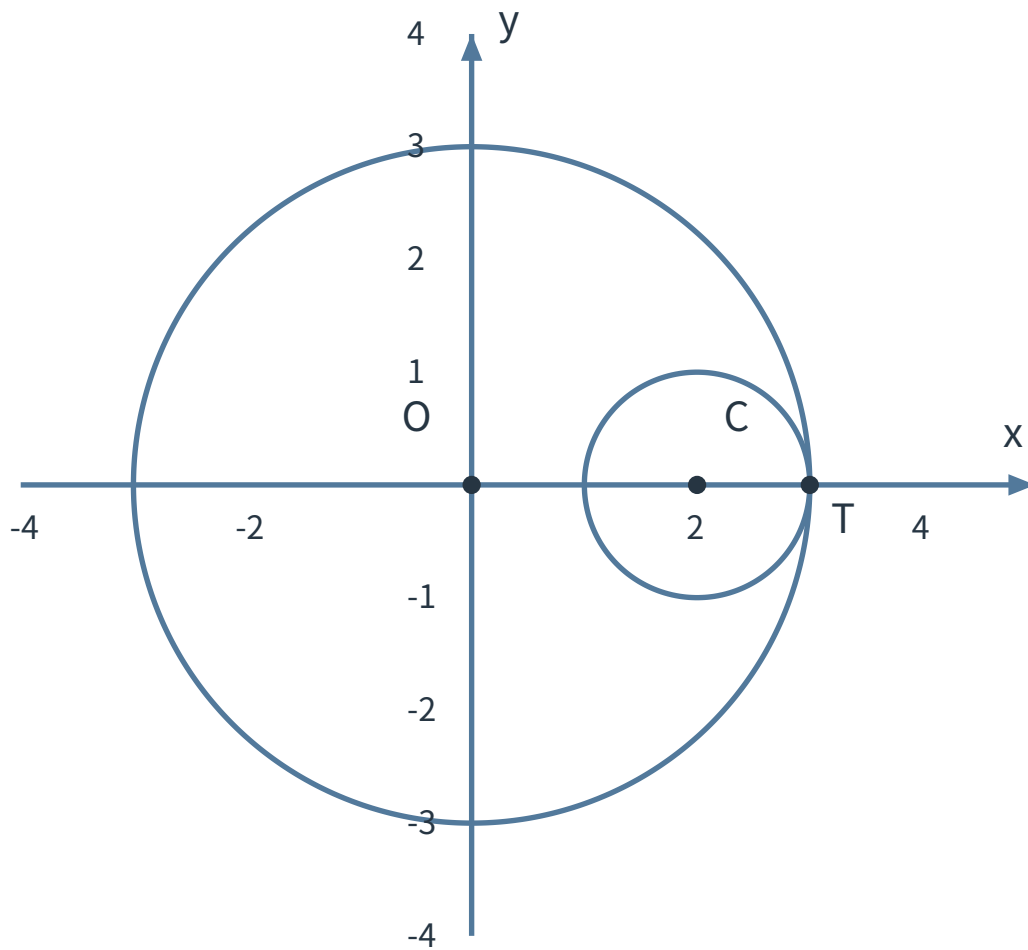


図4 1点で内接する2つの円

内部で離れている場合

中心間距離が半径の差より小さい場合

中心を $O(0,0)$ 、 $C(1,0)$ 、半径をそれぞれ 3、1 とする。

$d = 1$ 、 $R - r = 2$ であるから、 $d < R - r$ である。小さい円は大きい円の内部に完全に入り、2つの円に共有点はない。

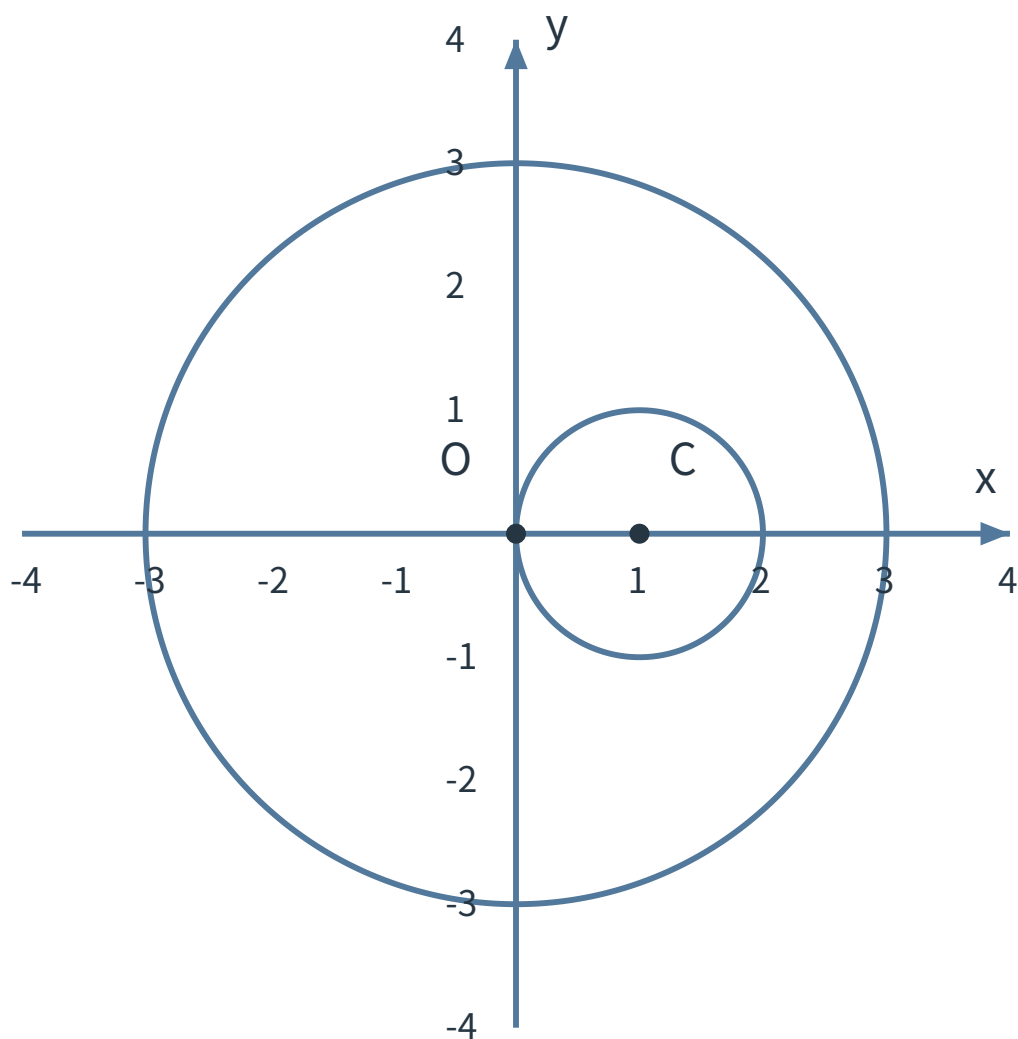


図5 一方が他方の内部にあり離れている2つの円

同じ中心をもつ場合に注意する

中心間距離が $d = 0$ であっても、必ず同じ円になるわけではない。
 半径が異なれば、一方の円がもう一方の円の内部にあり、共有点はない。一方、中心が同じで半径も同じ、すなわち $d = 0$ かつ $R = r$ ならば2つの円は完全に一致する。
 一致する2つの円では、円周上のすべての点が共有点なので、共有点は無数にある。

3. 円の方程式から位置関係を判断する

円の方程式が与えられた場合には、各円の中心と半径を読み取ってから中心間距離を求めればよい。

判定の手順

1. それぞれの円の中心と半径を求める。
2. 2つの中心間距離 d を求める。
3. d と $R + r$ 、 $R - r$ を比較する。
4. 共有点の個数と位置関係を判断する。

例題 1

次の 2 つの円の位置関係と共有点の個数を求めよ。

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

$$(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 1$$

例題 1 の解答・解説

第 1 の円の中心は $(1, -2)$ 、半径は 4 である。第 2 の円の中心は $(6, -2)$ 、半径は 1 である。中心間距離は $d = \sqrt{(6 - 1)^2 + \{-2 - (-2)\}^2} = 5$ である。半径の和も $R + r = 4 + 1 = 5$ なので、 $d = R + r$ である。

したがって、2 つの円は外接し、共有点は 1 個である。

この問題では、円の方程式を連立する前に中心と半径を見ることが判断の近道である。

例題 2

次の 2 つの円について、共有点の個数を求めよ。また、共有点の座標も求めよ。

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 25$$

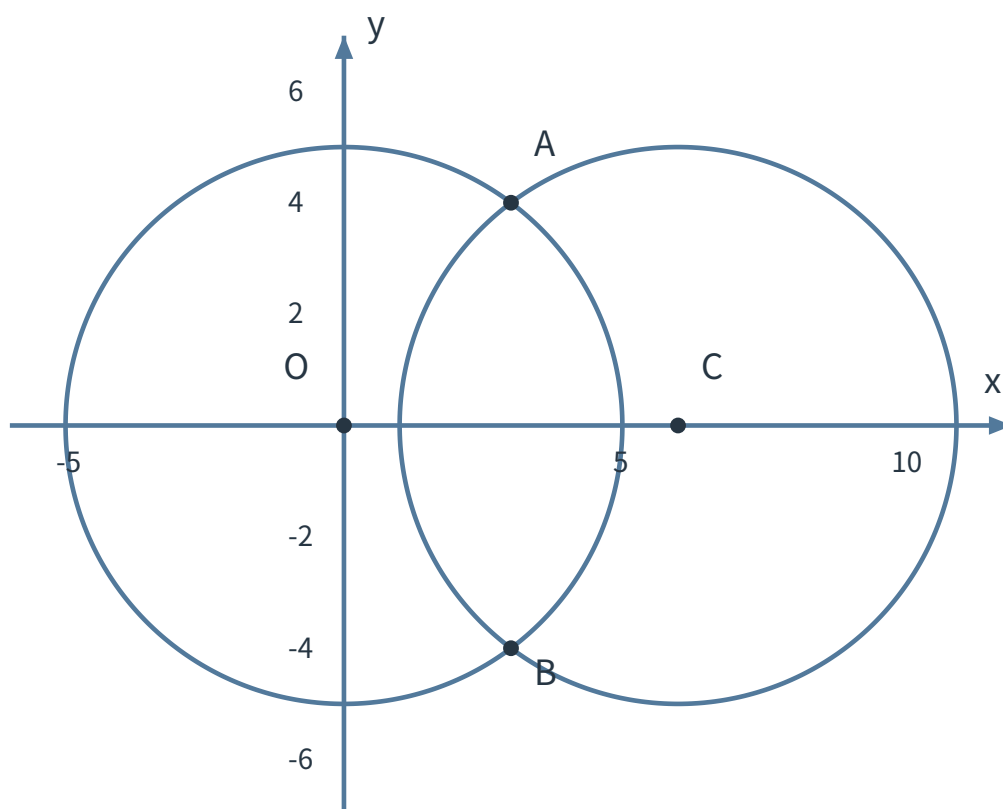


図 6 例題 2 の 2 つの円と共有点

例題 2 の解答・解説

2 つの円の半径はいずれも 5、中心は $(0,0)$ と $(6,0)$ である。したがって、中心間距離は $d = 6$ である。

半径の差は 0、半径の和は 10 であり、 $0 < 6 < 10$ が成り立つ。したがって、2 つの円は 2 点で交わる。

共有点の座標を求めるため、2 つの円の式を引く。

$$(x - 6)^2 + y^2 - (x^2 + y^2) = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 - x^2 = 0$$

$$-12x + 36 = 0$$

$$x = 3$$

$x = 3$ を $x^2 + y^2 = 25$ に代入すると、

$$9 + y^2 = 25$$

$$y^2 = 16$$

$$y = 4, -4$$

したがって、共有点は $(3,4)$ 、 $(3,-4)$ である。図の点 A、B と一致している。

よくある誤り

中心間距離 d と半径そのものを 1 つだけ比較しても、位置関係は決まらない。
2 つの円では、外側の境界を表す $R + r$ と、内側の境界を表す $R - r$ の両方を見る必要がある。
また、 $d = R - r$ を「共有点なし」としてしまう誤りにも注意が必要である。 $R > r$ のとき、この等号は内接する境界なので共有点は 1 個である。

4. 演習問題**演習 1**

半径がそれぞれ 5、2 の 2 つの円があり、中心間距離が 8 である。
2 つの円の位置関係と共有点の個数を答えよ。

演習 2

次の 2 つの円の位置関係と共有点の個数を求めよ。

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 16 \\(x - 3)^2 + y^2 &= 1\end{aligned}$$

演習 3

半径がそれぞれ 6、2 の 2 つの円に共有点がなく、小さい円が大きい円の内部にある。
中心間距離を d とするとき、 d の満たす範囲を求めよ。

演習 4

$a > 0$ とする。次の 2 つの円が接するとき、 a の値をすべて求めよ。

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 9 \\(x - a)^2 + y^2 &= 1\end{aligned}$$

演習 5

次の各組について、共有点の個数を答えよ。

- (1) $x^2 + y^2 = 4$ と $x^2 + y^2 = 4$
- (2) $x^2 + y^2 = 4$ と $x^2 + y^2 = 1$

演習 6

次の 2 つの円の共有点の座標を求めよ。

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 13 \\(x - 6)^2 + y^2 &= 13\end{aligned}$$

5. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

大きい方の半径を $R = 5$ 、小さい方を $r = 2$ とする。
半径の和は $R + r = 7$ である。中心間距離は $d = 8$ なので、 $d > R + r$ である。
したがって、2 つの円は外部で離れており、共有点は 0 個である。

演習 2 の解答・解説

第 1 の円の中心は $(0, 0)$ 、半径は 4 である。第 2 の円の中心は $(3, 0)$ 、半径は 1 である。
中心間距離は $d = 3$ 、半径の差も $R - r = 4 - 1 = 3$ である。
したがって、 $d = R - r$ であるから、小さい円は大きい円に内接する。共有点は 1 個である。

演習 3 の解答・解説

大きい方の半径は $R = 6$ 、小さい方は $r = 2$ である。
小さい円が大きい円の内部にあり、しかも共有点がないためには、 $d < R - r$ であればよい。半径の差は $R - r = 6 - 2 = 4$ である。
中心間距離は負にならないので、求める範囲は $0 \leq d < 4$ である。

演習 4 の解答・解説

第 1 の円の中心は $(0, 0)$ 、半径は 3、第 2 の円の中心は $(a, 0)$ 、半径は 1 である。
 $a > 0$ なので、中心間距離は $d = a$ である。
2 つの円が外接するときは $d = 3 + 1 = 4$ であるから、 $a = 4$ である。
2 つの円が内接するときは $d = 3 - 1 = 2$ であるから、 $a = 2$ である。
したがって、求める値は $a = 2, 4$ である。

演習 5 の解答・解説

(1) 2 つの円は中心も半径も同じである。したがって、2 つの円は一致し、共有点は無数にある。
(2) 2 つの円の中心はいずれも $(0, 0)$ であるが、半径はそれぞれ 2、1 で異なる。
中心間距離は $d = 0$ 、半径の差は $2 - 1 = 1$ なので、 $d < R - r$ である。したがって、小さい円は大きい円の内部にあり、共有点は 0 個である。

演習 6 の解答・解説

2 つの円の式を引いて x を求める。

$$(x - 6)^2 + y^2 - (x^2 + y^2) = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 - x^2 = 0$$

$$-12x + 36 = 0$$

$$x = 3$$

$x = 3$ を $x^2 + y^2 = 13$ に代入する。

$$9 + y^2 = 13$$

$$y^2 = 4$$

$$y = 2, -2$$

したがって、共有点は $(3, 2)$ 、 $(3, -2)$ である。

なお、2 つの円の半径はいずれも $\sqrt{13}$ 、中心間距離は 6 である。 $0 < 6 < 2\sqrt{13}$ であるため、位置関係からも共有点が 2 個あることを確認できる。