第 038 講 向心加速度と向心力

この講でできるようになること

- 速さが一定でも、速度の向きが変われば加速度が生じる理由を説明できる。
- 等速円運動の速度と加速度の向きを、円の中心と物体の位置から判断できる。
- 半径・速さ・角速度・周期から向心加速度の大きさを求め、一定条件を明示して比較できる。
- 物体に働く実在の力を整理し、中心向きの合力と運動方程式を結び付けられる。
- 糸が切れた後の運動を、切断直後の速度と力の条件から判断できる。

1. 速さが一定なのに、なぜ加速度が生じるのか

1.1 速さと速度は異なる

平らな場所で、小さな物体が円を描いて動いている場面を考える。物体は一定の速さで進んでいるが、まっすぐ進むのではなく、進む向きを次々と変えている。

このように、円形の軌道を一定の速さで動く運動を**等速円運動**という。

ここでは、地面に固定された慣性系から、半径 $r>0$ の円を速さ $v>0$ で動く質点を観察する。慣性系とは、力がつり合っている物体が静止または等速直線運動を続けるような基準系である。

等速円運動で変化しないのは、速度の「大きさ」である速さである。

一方、速度は大きさと向きを持つベクトルなので、進行方向が変われば速度も変化する。

例えば、東向きに $4\,\mathrm{m/s}$ で進む物体と北向きに $4\,\mathrm{m/s}$ で進む物体は、速さこそ同じだが、速度は同じではない。

速さが一定でも速度は変わる

加速度は、速度ベクトルの時間的な変化を表す量である。

速度の大きさが変わらなくても、向きが変われば速度ベクトルは変化する。したがって、速さが一定という理由だけで加速度を 0 と判断してはいけない。

1.2 円のどの位置でも速度は接線方向

中心を O とする円を、物体が反時計回りに動く場合を考える。

円の右端を P、上端を Q とする。物体は P から反時計回りに進むと、円周に沿って Q へ向かう。

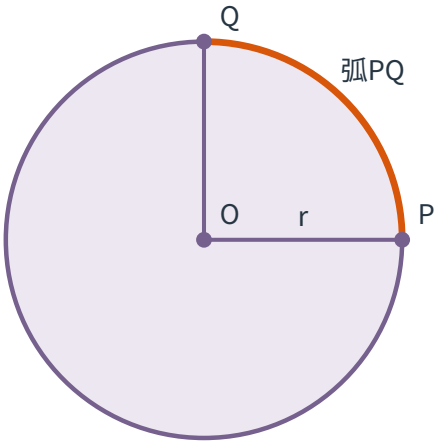


図 1　中心 O の円を反時計回りに動く。P は右端、Q は上端。図は軌道と位置を表す。

円運動のある瞬間の速度は、その位置での円の接線方向を向く。

そのため、反時計回りの運動では次のようになる。

- 右端 P での速度は上向きである。
- 上端 Q での速度は左向きである。

どちらも速さが $4\,\mathrm{m/s}$ であったとしても、速度の向きが異なるので、速度ベクトルは変化している。

第 004 講で学んだように、ベクトルの変化は「後のベクトルから前のベクトルを引く」ことで考える。

この考え方を速度に当てはめると、円運動にも速度の変化が存在することが分かる。

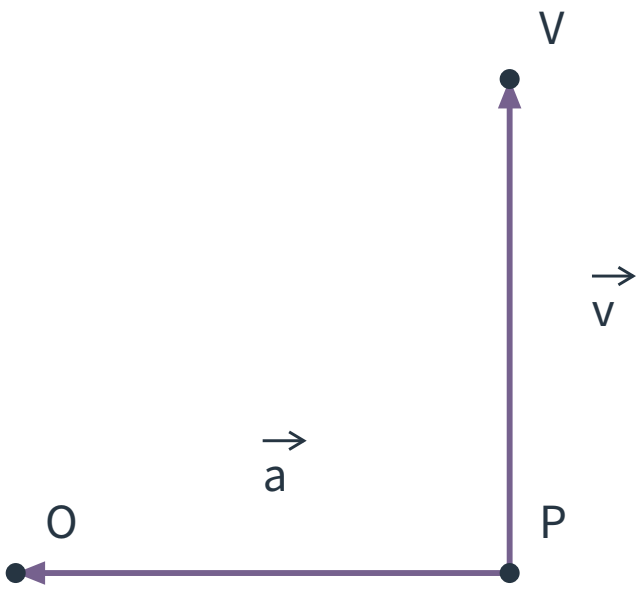
1.3 速度と加速度の向き

等速円運動では、各瞬間の加速度は円の中心を向く。

次の図は、先ほどの円の右端 P にいる物体について、同じ瞬間の速度と加速度の向きだけを取り出した模式図である。

O は円の中心、P は物体の現在位置であり、V は速度の矢印の先端を置くための作図点である。V は物体が次に到達する位置を表していない。

速度と加速度は異なる物理量なので、図中の矢印の長さを共通の尺度で比較することはできない。矢印が同じ長さに描かれていても、両者の数値が等しいという意味ではない。



図の上向きの矢印 $\vec{v}$ は速度、左向きの矢印 $\vec{a}$ は加速度を表す。

右端 P では、物体は上向きに進んでいるが、加速度は左の中心 O を向いている。

つまり、**速度が向く方向と、加速度が向く方向は一致しない**。

さらに、等速円運動の各瞬間では、速度と加速度は垂直である。

向心加速度

等速円運動で、各瞬間に円の中心を向く加速度を**向心加速度**という。

向心加速度の特徴は次のとおりである。

- 向きは、その瞬間の物体の位置から円の中心へ向かう方向である。
- 速度の向きとは垂直である。
- 速さが一定でも、速度の向きを変えるために必要である。

向心加速度の大きさを a と書く。a は大きさなので正の量として扱う。

では、なぜ加速度が中心を向くのだろうか。

等速円運動では、速さが変わらないまま、速度の矢印が少しずつ向きを変える。近い二つの時刻の速度ベクトルの差を考え、時間間隔を十分短くして各瞬間の変化を捉えると、その変化の向きは円の中心方向になる。

ただし、離れた二つの時刻で求める平均加速度の向きが、その区間の始点や終点での向心加速度と必ず一致するわけではない。

区間全体の平均加速度と、各瞬間の向心加速度は区別する必要がある。

中心へ加速することと、中心へ進むことは違う

向心加速度が中心向きであっても、物体の速度が中心向きになるわけではない。

物体はその瞬間には接線方向へ進み、加速度によって速度の向きを変え続ける。その結果、円形の軌道をたどる。

「加速度が左向きだから、物体も左向きに進む」と判断するのは誤りである。

2. 向心加速度の大きさを求める

2.1 速さと半径から計算する

向心加速度は、物体がどれくらい速く動き、どれくらい小さな円を回っているかによって変わる。

同じ半径なら、速く動くほど短時間で速度の向きが大きく変わる。

また、速さが同じなら、小さな円を回るほど進行方向を急激に変える必要がある。

この関係を数量で表すと、等速円運動の向心加速度の大きさは次の式となる。

向心加速度の大きさ

慣性系で半径 $r > 0$ の円を一定の速さ $v > 0$ で動く物体の向心加速度の大きさは、

$$a = \frac{v^2}{r}$$

である。

ここで、

- a：向心加速度の大きさ（$\mathrm{m/s^2}$）
- v：速さ（$\mathrm{m/s}$）
- r：円の半径（m）

を表す。

この式の分母は**半径**であり、直径ではない。

直径が $4\,\mathrm{m}$ と与えられた場合、式に代入する半径は $2\,\mathrm{m}$ となる。

単位を確かめると、

$$\frac{(\mathrm{m/s})^2}{\mathrm{m}} = \mathrm{m/s^2}$$

である。

これは加速度の単位と一致する。

2.2 角速度と周期を使う

第 037 講では、半径 r、速さ v、角速度 ω、周期 T の関係を学んだ。

角速度は、単位時間に回転する角度をラジアンで表した量である。等速円運動では角速度の大きさも一定であり、次の関係が成り立つ。

$$v = r\omega, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

ここで、ω の単位は rad/s、周期 T の単位は s である。周期とは 1 周にかかる時間を表す。

$T > 0$ として、$v = r\omega$ を向心加速度の式へ代入すると、

$$a = \frac{(r\omega)^2}{r}$$

$$= r\omega^2$$

となる。

さらに、$\omega = 2\frac{\pi}{T}$ を使えば、

$$a = r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$= \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

である。

したがって、等速円運動では次の三つの表し方を使い分けられる。

$$a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

速さが分かっているなら $\frac{v^2}{r}$、角速度が分かっているなら $r\omega^2$、周期が分かっているなら $4\pi^2\frac{r}{T^2}$ が便利である。

2.3 比較では何を一定にしたかが重要

向心加速度を比較するときは、変化させた量だけでなく、一定に保った量を先に確認する。

比較条件	向心加速度の関係	判断
半径 r を一定	$a \propto v^2$	速さを 2 倍にすると加速度は 4 倍
速さ v を一定	$a \propto \frac{1}{r}$	半径を 2 倍にすると加速度は半分
角速度 ω を一定	$a \propto r$	半径を 2 倍にすると加速度も 2 倍
半径 r と速さ v を一定	$a = \frac{v^2}{r}$	質量が変わっても加速度は同じ

特に注意したいのは半径の比較である。

速さを同じにして半径を大きくすると、加速度は小さくなる。一方、角速度を同じにして半径を大きくすると、加速度は大きくなる。

これは矛盾ではない。

角速度を一定にすると $v = r\omega$ によって速さも変化するため、比べている条件が異なるからである。

©ミライコーチング

比較の判断軸

公式だけを見て「半径が大きいほど加速度が大きい」「半径が大きいほど加速度が小さい」と決めてはいけない。

最初に何を一定にしたかを固定し、その条件に合う式を選ぶ。

3. 向心加速度を生み出す力

3.1 加速度があるなら合力がある

第 019 講で学んだ運動方程式を思い出す。

質量 m の物体に働く力のベクトルの合計を $\vec{F}_{\text{net}}$ とすると、

$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$$

である。

等速円運動では、加速度が中心向きなので、合力も中心向きになる。

加速度の大きさが $a = \frac{v^2}{r}$ であることから、中心向きの合力の大きさ F_{net} は、

$$F_{\text{net}} = ma = \frac{mv^2}{r}$$

となる。

この中心向きの合力を**向心力**と呼ぶ。

向心力

向心力とは、円運動する物体に働く実在の力のうち、円の中心方向への合力（または合力の中心向き成分）を表す名称である。

等速円運動では合力全体が中心向きであり、その大きさは、

$$F_{\text{net}} = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$$

である。

F_{net} の単位は N（ニュートン）である。

3.2 向心力は新しい種類の力ではない

物体に働く力として、重力、張力、摩擦力などを学んできた。

向心力は、これらとは別に新しく追加される力ではない。

例えば、糸につながれた物体が円運動するとき、糸の張力が中心向きの合力を与える場合がある。

このとき、

- 実際に物体を中心へ引いている力は糸の張力である。
- その張力が中心向きの合力に等しい。
- 「張力」と「向心力」を別々の力として足してはいけない。

同じ一つの力を、物体に働く力としては「張力」、円運動を成立させる役割としては「向心力」と呼んでいるのである。

複数の実在の力が働く場合も、それらを合成した結果が中心向きの合力を与える。個々の力すべてが中心向きである必要はない。

また、等速円運動では接線方向の加速度が 0 なので、接線方向の合力も 0 である。

遠心力を追加しない

本講では地面に固定された慣性系から運動を考える。

この基準系で物体に働く実在の力を整理するとき、「外向きの遠心力」を新しい力として追加してはいけない。

円運動に必要なのは、中心向きの合力である。

例題 1

質量 $0.50\,\mathrm{kg}$ の小球が、慣性系で半径 $2\,\mathrm{m}$ の円を速さ $4\,\mathrm{m/s}$ で等速円運動している。

次の量を求めよ。

(1) 向心加速度の大きさ

(2) 小球に働く中心向きの合力の大きさ

(3) 角速度の大きさ

(4) 周期

解答・解説

(1) 速さと半径が分かっているので、$a = \frac{v^2}{r}$ を使う。

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{(4\,\mathrm{m/s})^2}{2\,\mathrm{m}} \\
&= 8\,\mathrm{m/s^2}
\end{aligned}
$$

よって、向心加速度の大きさは $8\,\mathrm{m/s^2}$ である。速さが一定でも、加速度は 0 ではない。

(2) 運動方程式より、中心向きの合力の大きさは、

$$
\begin{aligned}
F_{\mathrm{net}} &= ma \\
&= (0.50\,\mathrm{kg})(8\,\mathrm{m/s^2}) \\
&= 4\,\mathrm{N}
\end{aligned}
$$

である。

この $4\,\mathrm{N}$ は合力の大きさを表しており、特定の種類の力が一つだけ働くことを意味するものではない。

(3) $v = r\omega$ を用いる。

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{v}{r} \\ &= \frac{4\,\mathrm{m/s}}{2\,\mathrm{m}} \\ &= 2\,\mathrm{rad/s}\end{aligned}$$

(4) 角速度と周期の関係から、

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{2\,\mathrm{rad/s}} \\ &= \pi\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

となる。

ラジアンは角度を表す無次元の単位であり、周期の計算結果の単位は秒である。

例題 2

質量 0.20 kg の物体が、慣性系で半径 0.50 m の円を角速度の大きさ 6 rad/s で等速円運動している。

速さ、向心加速度の大きさ、中心向きの合力の大きさ、周期をそれぞれ求めよ。

解答・解説

角速度が与えられているので、最初に $v = r\omega$ を使う。

$$\begin{aligned} v &= r\omega \\ &= (0.50\,\mathrm{m})(6\,\mathrm{rad/s}) \\ &= 3\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

向心加速度は $a = r\omega^2$ で求められる。

$$\begin{aligned} a &= r\omega^2 \\ &= (0.50\,\mathrm{m})(6\,\mathrm{rad/s})^2 \\ &= 18\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

角速度を 2 乗することに注意する。

中心向きの合力の大きさは、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{net}} &= ma \\ &= (0.20\,\mathrm{kg})(18\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 3.6\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

周期は、

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{6\,\mathrm{rad/s}} \\ &= \frac{\pi}{3}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

となる。

求めた速さ $3\,\mathrm{m/s}$ を使って $\frac{v^2}{r}$ を計算しても、同じ $18\,\mathrm{m/s^2}$ が得られる。

4. 糸につながれた物体の等速円運動

4.1 水平面上で働く力を整理する

滑らかな水平な台の上に小さな物体を置き、軽く伸びない糸で固定された中心につなぐ。

糸の長さを一定に保ち、物体が速さ一定で水平な円を描いて動く状況を考える。糸はたるまず、摩擦は無視できるものとする。

地面に固定された慣性系で、物体に働く実在の力は次の三つである。

1. 重力 mg：鉛直下向き
2. 台からの垂直抗力 N_{floor}：鉛直上向き
3. 糸の張力 F_{t}：水平方向で円の中心向き

ここで、m は質量、g は重力加速度の大きさである。

また、N_{floor} は垂直抗力の記号であり、単位記号の N と区別する。F_{t} は張力の大きさを表し、周期 T とも異なる記号である。

物体は鉛直方向には加速していないので、鉛直方向の運動方程式は、

$$N_{\text{floor}} - mg = 0$$

となる。したがって、

$$N_{\text{floor}} = mg$$

である。

一方、水平方向に働く力は糸の張力だけである。

糸の張力が中心向きの合力を与えるので、

$$F_{\text{t}} = F_{\text{net}} = \frac{mv^2}{r}$$

となる。

この式に「さらに向心力を足す」操作は必要ない。

運動方程式を立てる順番

1. 対象物体を一つ決める。
2. その物体に働く実在の力をすべて挙げる。
3. 鉛直方向と中心方向を区別する。
4. 各方向について合力と加速度を対応させる。

張力などの実在の力を整理した後で、中心向きの合力を向心力として扱う。

例題 3

滑らかな水平台上で、質量 0.20 kg の小球が軽く伸びない糸につながれ、半径 0.80 m、速さ 2 m/s で等速円運動している。

糸は水平で常に張っており、水平面内では張力だけが小球に働くものとする。重力加速度の大きさを $g = 10\,\text{m/s}^2$ とする。

(1) 向心加速度の大きさを求めよ。

(2) 糸の張力の大きさ F_{t} を求めよ。

(3) 台からの垂直抗力の大きさを求めよ。

(4) 「張力が 1 N、向心力が 1 N だから、中心向きに合計 2 N の力が働く」という考えが正しいか説明せよ。

解答・解説

(1) 速さと半径を用いる。

$$\begin{aligned} a &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{(2\,\mathrm{m/s})^2}{0.80\,\mathrm{m}} \\ &= 5\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

(2) 水平方向では糸の張力が中心向きの合力である。

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{t}} &= ma \\ &= (0.20\,\mathrm{kg})(5\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 1\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

(3) 鉛直方向の加速度は 0 なので、垂直抗力と重力がつり合う。

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{floor}} &= mg \\ &= (0.20\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 2\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

(4) 正しくない。

中心向きに働く実在の力は糸の張力 1 N である。この張力そのものが中心向きの合力、すなわち向心力である。

張力と向心力を別の力として加えると、同じ力を二重に数えることになる。

5. 糸が切れたら、物体はどちらへ進むのか

5.1 切れる直前の速度を考える

先ほどの滑らかな水平台上の物体が、軽い糸につながれたまま反時計回りに等速円運動しているとする。

糸が切れる前は、張力によって中心向きの加速度が生じるため、物体は円形の軌道を進んでいる。

では、糸が突然切れたらどうなるだろうか。

重要なのは、切れた瞬間に物体が持っていた速度である。

糸が切れても、物体の速度が突然中心向きや外向きへ変わるわけではない。

5.2 切断後に働く力を考える

切断後も物体が同じ滑らかな水平面上を動くものとする。

重力と台からの垂直抗力は引き続き鉛直方向でつり合い、摩擦も無視する。

糸が切れた後は張力がなくなるので、水平方向の合力は 0 となる。

したがって、水平方向の運動方程式から、

$$F_{\text{net,horizontal}} = 0$$

であり、水平方向の加速度も 0 となる。

物体は、切れた瞬間の速度の大きさと向きを保って、水平面上を等速直線運動する。

切断後に円運動の式を使わない

糸が切れる前は、半径 r の等速円運動として $a = \frac{v^2}{r}$ を使える。

しかし、切断後は水平面内で円運動を続けない。したがって、切断前の円の半径をそのまま使って、切断後にも $a = \frac{v^2}{r}$ を適用してはいけない。

運動の条件が変わったら、働く力と加速度を改めて判断する必要がある。

例題 4

先ほどの中心 O、右端 P、上端 Q の円を考える。

小球が慣性系で半径 $2\,\mathrm{m}$ の円を反時計回りに、速さ $4\,\mathrm{m/s}$ で等速円運動している。

(1) 右端 P における速度と向心加速度の向きを答えよ。

(2) 上端 Q における速度と向心加速度の向きを答えよ。

(3) 右端 P で糸が切れ、以後は滑らかな水平面上で水平力が働かない場合、切断後の運動を説明せよ。

解答・解説

(1) 反時計回りなので、右端 P での速度は上向きである。向心加速度は中心 O を向くので、左向きである。

加速度の大きさは、

$$a = \frac{(4\,\mathrm{m/s})^2}{2\,\mathrm{m}}$$
$$= 8\,\mathrm{m/s^2}$$

となる。

(2) 上端 Q では、接線方向の速度は左向きである。向心加速度は中心へ向かうため下向きである。

等速円運動なので、加速度の大きさは P と同じ $8\,\mathrm{m/s^2}$ である。

(3) 糸が切れると水平張力はなくなる。

切断後は水平力が 0 であり、水平加速度も 0 である。

したがって、切断直前の上向きの速度 $4\,\mathrm{m/s}$ を保ち、P から上向きに等速直線運動する。

円の中心へ進んだり、半径方向の外側へ飛び出したりするわけではない。

6. 等速円運動で使える判断と、その限界

ここまでの式は、速さが一定の等速円運動を基本としている。

向心加速度の式 $a = \frac{v^2}{r}$ は、半径と速さが分かれば中心向き加速度の大きさを求められる便利な関係である。

しかし、円形の軌道を動いていれば、どのような運動でも加速度全体が中心向きになるとは限らない。

例えば、円周上を動きながら速さが増加する場合には、速度の向きだけでなく大きさも変化する。そのため、中心向きの加速度に加え、接線方向の加速度も生じ得る。

本講では次の条件を区別して扱う。

運動の状態	加速度と合力の判断
速さ一定の円運動	加速度と合力は中心向き
円周上で速さも変わる運動	中心向きに加え、接線方向の加速度も生じ得る
糸が切れ、水平力が 0 となった後の水平運動	水平加速度は 0 となり、接線方向への等速直線運動

円運動の向心加速度の大きさは質量に依存しない。一方、同じ半径と速さの円運動を維持するために必要な中心向き合力の大きさは、質量に比例する。

運動の条件を固定することと、力を固定することは別である。

この区別を踏まえ、以下の演習に取り組む。

演習問題

演習 1

質量 $0.40\,\mathrm{kg}$ の物体が、慣性系で半径 $2\,\mathrm{m}$ の円を周期 $4\,\mathrm{s}$ で等速円運動している。

円周率は π のまま計算してよい。

演習 1(1) 角速度の大きさ ω を求めよ。

演習 1(2) 速さ v を求めよ。

演習 1(3) 向心加速度の大きさ a を求めよ。

演習 1(4) 中心向きの合力の大きさ F_{net} を求めよ。

対応解説：巻末の『演習 1 の解答・解説』

演習 2

慣性系で等速円運動する物体について、速さと半径を変えた場合の向心加速度を比較する。

最初の状態は半径 $r = 2\,\mathrm{m}$、速さ $v = 4\,\mathrm{m/s}$ である。

それぞれ独立した比較として考え、指定された一定条件を守ること。

演習 2(1) 最初の状態での向心加速度の大きさを求めよ。

演習 2(2) 半径を $2\,\mathrm{m}$ に保ち、速さだけを $8\,\mathrm{m/s}$ にした。向心加速度の大きさと、最初の状態に対する倍率を求めよ。

演習 2(3) 速さを $4\,\mathrm{m/s}$ に保ち、半径だけを $4\,\mathrm{m}$ にした。向心加速度の大きさと、最初の状態に対する倍率を求めよ。

演習 2(4) 最初の状態の角速度は $2\,\mathrm{rad/s}$ である。この角速度を一定に保ったまま、半径を $4\,\mathrm{m}$ にした。新しい速さと向心加速度の大きさを求め、(3)と結果が異なる理由を説明せよ。

対応解説：巻末の『演習 2 の解答・解説』

演習 3

慣性系で二つの物体 A、B が、それぞれ半径 $2\,\mathrm{m}$、速さ $4\,\mathrm{m/s}$ の等速円運動をしている。

物体 A の質量は $0.50\,\mathrm{kg}$、物体 B の質量は $1.00\,\mathrm{kg}$ である。

両物体は、同じ半径と速さの円運動を維持しているものとする。

演習 3(1) A、B それぞれの向心加速度の大きさを求めよ。

演習 3(2) A、B それぞれに必要な中心向きの合力の大きさを求めよ。

演習 3(3) 「B は A より質量が大きいので、向心加速度も大きい」という主張が正しいか説明せよ。

対応解説：巻末の『演習 3 の解答・解説』

演習 4

中心 O、右端 P、上端 Q の円を考える。

慣性系で小球が半径 $2\,\mathrm{m}$ の円を速さ $4\,\mathrm{m/s}$ で等速円運動している。

演習 4(1) 小球が反時計回りに動く場合、右端 P での速度と加速度の向きを答え、加速度の大きさを求めよ。

演習 4(2) 同じ反時計回りの運動について、上端 Q での速度と加速度の向きを答えよ。

演習 4(3) 回転方向を時計回りに変えた場合、右端 P での速度と加速度の向きを答えよ。ただし速さと半径は変わらないものとする。

演習 4(4) 反時計回りの等速円運動中に右端 P で糸が切れた。切断後も同じ滑らかな水平台上を運動し、重力と垂直抗力がつり合い、水平力は働かないものとする。切断後の水平加速度と進行方向を答えよ。

対応解説：巻末の『演習 4 の解答・解説』

©ミライコーチング

演習 5

質量 1 kg の物体が、慣性系で半径 4 m の円を等速円運動している。

物体に働く中心向きの合力の大きさは 9 N である。

演習 5(1) 向心加速度の大きさを求めよ。

演習 5(2) 物体の速さを求めよ。

演習 5(3) 角速度の大きさと周期を求めよ。

演習 5(4) ある生徒は、$v^2 = 36\,\mathrm{m^2/s^2}$ となったことから「速さは 36 m/s」と答えた。この考えの誤りを説明せよ。

対応解説：巻末の『演習 5 の解答・解説』

演習 6

滑らかな水平台上にある質量 $m > 0$ の小球が、軽く伸びない水平な糸につながれ、慣性系で半径 $r > 0$、速さ $v > 0$ の等速円運動をしている。

糸は常に張っており、水平面内で小球に働く力は糸の張力だけである。重力と垂直抗力は鉛直方向でつり合う。

次の問いに答えよ。

演習 6(1) 糸の張力の大きさ F_{t} を、m、r、v を用いて表せ。

演習 6(2) 「張力に加えて、同じ大きさの向心力が別に働く」という説明が正しいか判断し、その理由を述べよ。

演習 6(3) 糸が切れた後、水平面内に力が働かないとき、切断前の半径 r を用いた $a = \dfrac{v^2}{r}$ を切断後の加速度にそのまま使えるか説明せよ。

演習 6(4) 物体が円周上を動きながら速さも増加する場合、「加速度は中心向きだけである」と断定できるか説明せよ。

対応解説：巻末の『演習 6 の解答・解説』

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

演習 1(1)

周期 $T = 4\,\mathrm{s}$ なので、角速度の大きさは、

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2\pi}{T} \\ &= \frac{2\pi}{4\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad/s}\end{aligned}$$

である。

答え： $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad/s}$

演習 1(2)

速さは $v = r\omega$ で求める。

$$\begin{aligned}v &= r\omega \\ &= (2\,\mathrm{m})\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad/s}\right) \\ &= \pi\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

答え： $\pi\,\mathrm{m/s}$

演習 1(3)

向心加速度は $a = r\omega^2$ を使う。

$$\begin{aligned}a &= r\omega^2 \\ &= (2\,\mathrm{m})\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad/s}\right)^2 \\ &= \frac{\pi^2}{2}\,\mathrm{m/s^2}\end{aligned}$$

単位は加速度の $\mathrm{m/s^2}$ となる。

答え： $\frac{\pi^2}{2}\,\mathrm{m/s^2}$

演習 1(4)

運動方程式から、

$$\begin{aligned} F_{\text{net}} &= ma \\ &= (0.40\,\text{kg})\left(\frac{\pi^2}{2}\,\text{m/s}^2\right) \\ &= \frac{\pi^2}{5}\,\text{N} \end{aligned}$$

となる。

答え： $\frac{\pi^2}{5}\,\text{N}$

周期から求めた角速度、速さ、加速度、合力の単位は、それぞれ rad/s、m/s、m/s^2、N と異なる。式とともに単位も確かめることが重要である。

演習 2 の解答・解説

演習 2(1)

最初の状態は半径 2 m、速さ 4 m/s である。

$$\begin{aligned} a &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{(4\,\text{m/s})^2}{2\,\text{m}} \\ &= 8\,\text{m/s}^2 \end{aligned}$$

答え： $8\,\text{m/s}^2$

演習 2(2)

半径を一定にして速さだけを 8 m/s に変える。

$$\begin{aligned} a &= \frac{(8\,\text{m/s})^2}{2\,\text{m}} \\ &= 32\,\text{m/s}^2 \end{aligned}$$

最初の加速度は $8\,\text{m/s}^2$ だったので、

$$\frac{32\,\text{m/s}^2}{8\,\text{m/s}^2} = 4$$

となる。

速さを 2 倍にすると、v^2 は 4 倍になる。

答え： $32\,\text{m/s}^2$、最初の 4 倍

演習 2(3)

今度は速さ $4\,\mathrm{m/s}$ を一定にして、半径を $4\,\mathrm{m}$ に変える。

$$\begin{aligned} a &= \frac{(4\,\mathrm{m/s})^2}{4\,\mathrm{m}} \\ &= 4\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

最初の値との比は、

$$\frac{4\,\mathrm{m/s^2}}{8\,\mathrm{m/s^2}} = \frac{1}{2}$$

である。

答え： $4\,\mathrm{m/s^2}$、最初の $\frac{1}{2}$ 倍

演習 2(4)

今回は速さではなく、角速度 $\omega = 2\,\mathrm{rad/s}$ を一定にしている。

半径 $4\,\mathrm{m}$ のときの速さは、

$$\begin{aligned} v &= r\omega \\ &= (4\,\mathrm{m})(2\,\mathrm{rad/s}) \\ &= 8\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

向心加速度は、

$$\begin{aligned} a &= r\omega^2 \\ &= (4\,\mathrm{m})(2\,\mathrm{rad/s})^2 \\ &= 16\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

となる。

答え： 速さ $8\,\mathrm{m/s}$、向心加速度 $16\,\mathrm{m/s^2}$

(3)では速さを一定にしたが、(4)では角速度を一定にした。

(4)では半径の増加とともに速さも増加するので、半径を大きくしたときの加速度の変化が異なる。

比較条件を並べると、違いが明確になる。

条件	半径	速さ	角速度	加速度
最初の状態	$2\,\mathrm{m}$	$4\,\mathrm{m/s}$	$2\,\mathrm{rad/s}$	$8\,\mathrm{m/s^2}$
(2) 半径一定	$2\,\mathrm{m}$	$8\,\mathrm{m/s}$	$4\,\mathrm{rad/s}$	$32\,\mathrm{m/s^2}$
(3) 速さ一定	$4\,\mathrm{m}$	$4\,\mathrm{m/s}$	$1\,\mathrm{rad/s}$	$4\,\mathrm{m/s^2}$
(4) 角速度一定	$4\,\mathrm{m}$	$8\,\mathrm{m/s}$	$2\,\mathrm{rad/s}$	$16\,\mathrm{m/s^2}$

半径だけを見て加速度の増減を決めないことが重要である。

©ミライコーチング

演習 3 の解答・解説

演習 3(1)

A、B はどちらも半径 2 m、速さ 4 m/s の等速円運動をしている。

向心加速度の大きさは質量を使わずに求められる。

$$\begin{aligned} a &= \frac{v^2}{r} \\ &= \frac{(4\,\mathrm{m/s})^2}{2\,\mathrm{m}} \\ &= 8\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

答え： A、B ともに $8\,\mathrm{m/s^2}$

演習 3(2)

A の質量は 0.50 kg なので、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{net,A}} &= m_{\mathrm{A}} a \\ &= (0.50\,\mathrm{kg})(8\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 4\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

B の質量は 1.00 kg なので、

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{net,B}} &= m_{\mathrm{B}} a \\ &= (1.00\,\mathrm{kg})(8\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 8\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

答え： A は 4 N、B は 8 N

演習 3(3)

主張は正しくない。

向心加速度の大きさは $a = \frac{v^2}{r}$ で決まるため、半径と速さが同じなら質量によらず同じ値になる。

一方、必要な中心向きの合力の大きさは $F_{\mathrm{net}} = ma$ なので、同じ加速度を維持するには、質量が 2 倍なら合力も 2 倍必要となる。

本問は「半径と速さが同じ」という条件の比較であり、「物体に働く力が同じ」という別の条件に変更してはいけない。

答え： A、B の加速度は等しいが、B に必要な合力は A の 2 倍である。

演習 4 の解答・解説

演習 4(1)

右端 P では、反時計回りの接線方向は上向きである。

加速度は中心 O に向かうため、左向きとなる。

加速度の大きさは、

$$a = \frac{(4\,\mathrm{m/s})^2}{2\,\mathrm{m}}$$
$$= 8\,\mathrm{m/s^2}$$

である。

答え： 速度は上向き、加速度は左向き、加速度の大きさは $8\,\mathrm{m/s^2}$

演習 4(2)

上端 Q では反時計回りの接線方向が左向きとなる。

中心 O は Q の真下にあるので、加速度は下向きである。

答え： 速度は左向き、加速度は下向き

演習 4(3)

時計回りに変わると、右端 P での接線方向は下向きになる。

しかし、円の中心 O は依然として P の左側にある。

向心加速度の向きは回転方向だけではなく、現在位置と中心の位置関係で決まる。

答え： 速度は下向き、加速度は左向き

加速度の大きさも、半径と速さが変わらないので $8\,\mathrm{m/s^2}$ のままである。

演習 4(4)

糸が切れる直前、P における速度は上向きであり、大きさは $4\,\mathrm{m/s}$ である。

切断後は張力がなくなり、水平面内に働く合力は 0 となる。

したがって、

$$a_{\mathrm{horizontal}} = 0\,\mathrm{m/s^2}$$

である。

物体は切断直前の速度を保つため、上向きに速さ $4\,\mathrm{m/s}$ で等速直線運動する。

答え： 水平加速度は $0\,\mathrm{m/s^2}$、進行方向は上向き

切断前の円の中心へ進むのではない。また、水平力がなくなった後も旧半径を使って向心加速度を計算するのは誤りである。

演習 5 の解答・解説

演習 5(1)

中心向きの合力が $9\,\mathrm{N}$、質量が $1\,\mathrm{kg}$ である。

運動方程式 $F_{\mathrm{net}} = ma$ より、

$$\begin{aligned} a &= \frac{F_{\mathrm{net}}}{m} \\ &= \frac{9\,\mathrm{N}}{1\,\mathrm{kg}} \\ &= 9\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

となる。

答え： $9\,\mathrm{m/s^2}$

演習 5(2)

向心加速度の式を速さについて変形する。

$$a = \frac{v^2}{r}$$

なので、

$$v^2 = ar = \frac{F_{\mathrm{net}} r}{m}$$

である。

数値を代入すると、

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{(9\,\mathrm{N})(4\,\mathrm{m})}{1\,\mathrm{kg}} \\ &= 36\,\mathrm{m^2/s^2} \end{aligned}$$

となる。

速さは負にならないので、正の平方根を採用する。

$$v = \sqrt{36\,\mathrm{m^2/s^2}} = 6\,\mathrm{m/s}$$

答え： $6\,\mathrm{m/s}$

演習 5(3)

角速度の大きさは、

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{v}{r} \\ &= \frac{6\,\mathrm{m/s}}{4\,\mathrm{m}} \\ &= 1.5\,\mathrm{rad/s}\end{aligned}$$

である。

周期は、

$$\begin{aligned}T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi}{1.5\,\mathrm{rad/s}} \\ &= \frac{4\pi}{3}\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

となる。

答え： 角速度は $1.5\,\mathrm{rad/s}$、周期は $\frac{4\pi}{3}\,\mathrm{s}$

演習 5(4)

$36\,\mathrm{m^2/s^2}$ は速さそのものではなく、速さの 2 乗 v^2 の値である。

速さを求めるには平方根を取る必要がある。

したがって、

$$v = 6\,\mathrm{m/s}$$

が正しい。

単位にも注目すると、v^2 の単位は $\mathrm{m^2/s^2}$ であり、速さの単位 $\mathrm{m/s}$ とは異なる。

答え： v^2 と v を混同している。正の平方根を取って $6\,\mathrm{m/s}$ とする必要がある。

演習 6 の解答・解説

演習 6(1)

滑らかな水平面上なので、鉛直方向では重力と垂直抗力がつり合う。

水平面内では糸の張力だけが中心向きに働いている。

したがって、張力の大きさは中心向きの合力の大きさに等しく、

$$F_{\mathrm{t}} = \frac{mv^2}{r}$$

となる。

答え： $F_{\mathrm{t}} = \frac{mv^2}{r}$

演習 6(2)

説明は正しくない。

この条件では、実在の水平力は張力だけであり、その張力が中心向きの合力となっている。

「向心力」は合力の役割を表す名前であり、張力とは別に追加する力ではない。

仮に張力と同じ大きさの向心力をもう一つ足すと、中心向きの合力を誤って 2 倍に数えることになる。

答え： 誤り。張力自体が中心向きの合力であり、向心力として二重加算しない。

演習 6(3)

そのまま使うことはできない。

糸が切れた後は水平張力がなくなり、水平面内で合力が 0 となる。

そのため、水平加速度は、

$$a_{\text{horizontal}} = 0$$

である。

一方、$a = \frac{v^2}{r}$ は等速円運動の向心加速度の大きさを求める式である。

切断後は旧円の軌道から離れて直線運動するため、旧半径 r を用いた円運動の式を適用する条件が失われている。

答え： 使えない。切断後は水平合力が 0 で、水平加速度も 0 となるからである。

演習 6(4)

断定できない。

等速円運動では速度の大きさが一定なので、加速度は中心向きだけである。

しかし、円周上で速さも増加する場合には、速度の向きだけでなく大きさも変化する。

このとき、中心向きの加速度に加えて接線方向の加速度も生じ得る。

したがって、加速度全体が中心向きであるという結論は、等速円運動の条件に限定して判断する必要がある。

答え： 断定できない。速さも変化する場合には接線方向の加速度が生じ得るためである。

©ミライコーチング