

第 71 講 最大公約数と最小公倍数

学習目標

- ・ 2 つ以上の整数に共通する約数・倍数の意味を説明できる。
- ・ 最大公約数と最小公倍数を、約数や倍数の列挙から求められる。
- ・ 素因数分解した指数を比較して、最大公約数と最小公倍数を求められる。
- ・ 2 つの正の整数について、最大公約数と最小公倍数の積が 2 数の積に等しくなることを利用できる。

共通する約数を考える

12 と 18 の約数を比べる

12 の正の約数は、

1, 2, 3, 4, 6, 12

である。

18 の正の約数は、

1, 2, 3, 6, 9, 18

である。

両方に現れる正の約数は、

1, 2, 3, 6

である。

このように、2 つ以上の整数に共通する約数を**公約数**という。

公約数

2 つ以上の整数のすべてについて約数となる整数を**公約数**という。

正の公約数を考えるときは、各数の正の約数の中から共通するものを探せばよい。

最大公約数

最大公約数

2 つ以上の正の整数の正の公約数のうち、最も大きいものを**最大公約数**という。

12 と 18 の最大公約数

12 と 18 の正の公約数は、

1, 2, 3, 6

である。

この中で最も大きい数は 6 なので、12 と 18 の最大公約数は 6 である。

列挙で求める基本手順

小さい数の場合は、次の方法で最大公約数を求められる。

1. それぞれの正の約数を列挙する。
2. 共通する約数を探す。
3. その中で最も大きいものを選ぶ。

これが最大公約数である。

共通する倍数を考える

4 と 6 の倍数を比べる

4 の正の倍数は、

4, 8, 12, 16, 20, 24, ...

である。

6 の正の倍数は、

6, 12, 18, 24, 30, ...

である。

両方に現れる正の倍数は、

12, 24, 36, ...

である。

このように、2 つ以上の整数すべての倍数になっている数を**公倍数**という。

公倍数

2 つ以上の整数のすべてについて倍数となる整数を**公倍数**という。

最小公倍数では正の公倍数を見る

0 は、0 でない整数の倍数であるため、複数の整数に共通する倍数にもなる。

しかし、最小公倍数を考えるときは、**正の公倍数の中で最も小さいもの**を考える。

0 を最小公倍数とはしない。

最小公倍数

最小公倍数

2 つ以上の正の整数の正の公倍数のうち、最も小さいものを**最小公倍数**という。

4 と 6 の最小公倍数

4 と 6 の正の公倍数は、

12, 24, 36, ...

である。

この中で最も小さいものは 12 なので、4 と 6 の最小公倍数は 12 である。

列挙で求める基本手順

小さい数の場合は、次の方法で最小公倍数を求められる。

1. それぞれの正の倍数を小さい方から並べる。
2. 最初に共通して現れる正の倍数を探す。
3. その数が最小公倍数である。

素因数分解を利用する

約数と倍数を素因数の個数で見る

大きな整数では、約数や倍数をすべて列挙するより、素因数分解を利用すると整理しやすい。
たとえば、72 と 60 を素因数分解すると、

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

である。

最大公約数では、両方に共通して含まれる素因数について、**少ない方の個数**まで使う。

最小公倍数では、どちらの数も割り切れるために必要な素因数を、**多い方の個数**まで使う。

最大公約数は小さい指数を選ぶ

72 と 60 の最大公約数

72 と 60 を比べる。

素因数	72 での指数	60 での指数	最大公約数で使う指数
2	3	2	2
3	2	1	1
5	0	1	0

最大公約数では、両方に含まれる範囲までしか使えない。

したがって、

$$2^2 \cdot 3 = 12$$

である。

よって、72 と 60 の最大公約数は 12 である。

最大公約数の指数

素因数分解から最大公約数を求めるときは、各素因数について**小さい方の指数**を選ぶ。

一方に含まれない素因数は指数 0 と考えるため、最大公約数には含めない。

最小公倍数は大きい指数を選ぶ

72 と 60 の最小公倍数

同じ 72 と 60 を考える。

素因数	72 での指数	60 での指数	最小公倍数で使う指数
2	3	2	3
3	2	1	2
5	0	1	1

最小公倍数は 72 でも 60 でも割り切れる必要がある。
そのため、それぞれの素因数を不足しないように多い方まで用いる。
したがって、

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

である。
よって、72 と 60 の最小公倍数は 360 である。

最小公倍数の指数

素因数分解から最小公倍数を求めるときは、現れるすべての素因数について大きい方の指数を選ぶ。

小さい指数と大きい指数の意味

なぜ最大公約数では小さい方なのか

たとえば、

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

とする。
共通する 2 の因数は、24 には 3 個、36 には 2 個ある。
両方に共通して使える 2 は 2 個までなので、最大公約数には 2^2 を使う。
一方、24 と 36 の両方の倍数を作るには、2 を 3 個、3 を 2 個用意すれば両方の素因数をすべて含められる。
したがって、最小公倍数には $2^3 \cdot 3^2$ を使う。

判断のイメージ

- ・ 最大公約数：両方に共通して持っている分だけ取る
 - ・ 最小公倍数：どちらにも不足しないように全部そろえる
- この見方と指数の大小を対応させると理解しやすい。

2 数の積との関係

最大公約数と最小公倍数の積

2 つの正の整数 a, b について、

$$\text{最大公約数} \times \text{最小公倍数} = a \cdot b$$

が成り立つ。
たとえば 12 と 18 では、最大公約数は 6、最小公倍数は 36 である。
したがって、

$$6 \cdot 36 = 216$$

である。
一方、

$$12 \cdot 18 = 216$$

なので、確かに一致する。

2 数の積との関係

2 つの正の整数 a, b の最大公約数を g 、最小公倍数を l とすると、

$$g \cdot l = a \cdot b$$

が成り立つ。

素因数の指数で見る

ある素因数について、 a に含まれる指数を m 、 b に含まれる指数を n とする。
最大公約数には小さい方の指数が入り、最小公倍数には大きい方の指数が入る。
小さい方と大きい方を足すと、

$$m + n$$

になる。

これは $a \cdot b$ に含まれるその素因数の指数と同じである。

このため、最大公約数と最小公倍数を掛けると $a \cdot b$ になる。

2 数の積との関係は正の整数で使う

この講では、2 つの正の整数について、

$$g \cdot l = a \cdot b$$

を用いる。

符号や 0 を含む場合へ広げず、入門範囲では正の整数に限定して扱う。

求め方を使い分ける

基本手順

最大公約数や最小公倍数を求める方法には、次の 2 つがある。

1. 数が小さければ、約数や倍数を列挙する。
2. 数が大きければ、素因数分解して指数を比較する。

素因数分解を利用するときは、

- ・ 最大公約数では小さい指数
- ・ 最小公倍数では大きい指数

を選ぶ。

例題

例題 1

18 と 30 の最大公約数と最小公倍数を、素因数分解を利用して求めよ。

例題 1 の解答・解説

それぞれ素因数分解すると、

$$\begin{aligned}18 &= 2 \cdot 3^2 \\30 &= 2 \cdot 3 \cdot 5\end{aligned}$$

である。

最大公約数では、小さい方の指数を使う。

したがって、

$$2 \cdot 3 = 6$$

なので、最大公約数は 6 である。

最小公倍数では、大きい方の指数を使う。

したがって、

$$2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$$

なので、最小公倍数は 90 である。

例題 2

48 と 72 の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

例題 2 の解答・解説

素因数分解すると、

$$\begin{aligned}48 &= 2^4 \cdot 3 \\72 &= 2^3 \cdot 3^2\end{aligned}$$

である。

最大公約数は小さい方の指数を用いるので、

$$2^3 \cdot 3 = 24$$

である。

最小公倍数は大きい方の指数を用いるので、

$$2^4 \cdot 3^2 = 144$$

である。

したがって、最大公約数は 24、最小公倍数は 144 である。

例題 3

2 つの正の整数の積が 540 であり、最大公約数が 6 である。

この 2 数の最小公倍数を求めよ。

例題 3 の解答・解説

最大公約数を g 、最小公倍数を l とすると、

$$g \cdot l = 2 \text{ 数の積}$$

である。

したがって、

$$6l = 540$$

となる。

よって、

$$l = 90$$

である。

したがって、最小公倍数は 90 である。

演習問題

練習問題 1

8 と 12 の正の公約数をすべて列挙し、最大公約数を求めよ。

練習問題 2

6 と 8 の正の倍数を小さい方から調べ、最小公倍数を求めよ。

練習問題 3

24 と 36 の最大公約数と最小公倍数を、素因数分解を利用して求めよ。

練習問題 4

40 と 60 の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

練習問題 5

次の 2 数について、最大公約数と最小公倍数を求めよ。

$$2^3 \cdot 3^2, \quad 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

練習問題 6

2 つの正の整数が 28 と 42 である。

(1) 最大公約数を求めよ。

(2) 最小公倍数を求めよ。

(3) 「最大公約数 $\times$ 最小公倍数」と「 28×42 」が等しいことを確認せよ。

練習問題 7

2 つの正の整数の積が 720 であり、最大公約数が 12 である。
最小公倍数を求めよ。

練習問題 8

ある生徒は、

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

を見て、最大公約数を、

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

とした。

誤りを説明し、正しい最大公約数を求めよ。

練習問題 9

ある生徒は、10 と 15 の最小公倍数について「0 は 10 の倍数でも 15 の倍数でもあるので、最小公倍数は 0 である」と述べた。
この誤りを説明し、正しい最小公倍数を求めよ。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

8 の正の約数は、

$$1, 2, 4, 8$$

である。

12 の正の約数は、

$$1, 2, 3, 4, 6, 12$$

である。

したがって、正の公約数は、

$$1, 2, 4$$

である。

この中で最も大きいものは 4 なので、最大公約数は 4 である。

練習問題 2 の解答・解説

6 の正の倍数は、

$$6, 12, 18, 24, \dots$$

である。

8 の正の倍数は、

$$8, 16, 24, \dots$$

である。

最初に共通して現れる正の倍数は 24 なので、最小公倍数は 24 である。

練習問題 3 の解答・解説

素因数分解すると、

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

である。

最大公約数は小さい指数を選ぶので、

$$2^2 \cdot 3 = 12$$

である。

最小公倍数は大きい指数を選ぶので、

$$2^3 \cdot 3^2 = 72$$

である。

したがって、最大公約数は 12、最小公倍数は 72 である。

練習問題 4 の解答・解説

素因数分解すると、

$$40 = 2^3 \cdot 5$$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

である。

最大公約数は、

$$2^2 \cdot 5 = 20$$

である。

最小公倍数は、

$$2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$$

である。

したがって、最大公約数は 20、最小公倍数は 120 である。

練習問題 5 の解答・解説

2 数は、

$$2^3 \cdot 3^2$$

と、

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

である。

最大公約数では小さい指数を用いる。

したがって、

$$2^2 \cdot 3 = 12$$

である。

最小公倍数では大きい指数を用いる。

したがって、

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

である。

練習問題 6 の解答・解説

素因数分解すると、

$$28 = 2^2 \cdot 7$$

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

である。

(1) 最大公約数は、

$$2 \cdot 7 = 14$$

である。

(2) 最小公倍数は、

$$2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$$

である。

(3)

$$14 \cdot 84 = 1176$$

である。

また、

$$28 \cdot 42 = 1176$$

である。

したがって、2 つの積は等しい。

練習問題 7 の解答・解説

最大公約数を g 、最小公倍数を l とすると、

$$g \cdot l = 2 \text{ 数の積}$$

である。

したがって、

$$12l = 720$$

となる。

よって、

$$l = 60$$

である。

したがって、最小公倍数は 60 である。

練習問題 8 の解答・解説

最大公約数は、両方の数に共通して含まれる素因数だけを使う。

また、指数は小さい方を選ぶ。

36 と 60 について、

- ・ 2 の指数はどちらも 2
- ・ 3 の指数は 36 では 2、60 では 1
- ・ 5 は 36 には含まれない

ので、最大公約数は、

$$2^2 \cdot 3 = 12$$

である。

3^2 や 5 を用いると、36 と 60 の両方を割り切る数にはならない。

練習問題 9 の解答・解説

0 は 10 の倍数でも 15 の倍数でもあるが、最小公倍数は正の公倍数の中で最も小さいものとして考える。

10 の正の倍数は、

$$10, 20, 30, \dots$$

である。

15 の正の倍数は、

$$15, 30, 45, \dots$$

である。

最初に共通する正の倍数は 30 なので、最小公倍数は 30 である。