第 211 講 定積分の置換積分

学習目標

- 定積分で変数を置き換えるとき、置換式・微分因子・積分区間の両端を対応させて計算できる。
- 増加する置換と減少する置換で、端点の対応と符号の扱いを判断できる。
- 新しい変数と新しい端点を用いて定積分を最後まで計算できる。

定積分でも変数を置き換える理由

定積分の置換積分は、合成関数の微分と原始関数の端点差から考えることができる。
$a<b$ とし、g が $[a,b]$ で連続微分可能であるとする。また、f が $g([a,b])$ を含む区間で連続であり、その区間上で $F'=f$ となる原始関数 F が存在するとする。これらは、この講で安全に利用するための十分な条件であり、一般の必要条件を述べているわけではない。
合成関数の微分より、 $\frac{d}{dx}F(g(x))=f(g(x))g'(x)$ である。したがって、元の変数xで積分すると、

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=F(g(b))-F(g(a))$$

となる。
一方、新しい変数を$t=g(x)$と考えると、端点は

$$x=a \Rightarrow t=g(a)$$

$$x=b \Rightarrow t=g(b)$$

へ対応する。よって、

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt=F(g(b))-F(g(a))$$

であり、

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

が得られる。
この式は、置換によって被積分関数だけでなく、微分因子と積分区間の両端も同時に変化することを表している。
この講では、区間上で連続微分可能な置換を考える。置換関数の単調性がすべての置換積分で必ず必要であるとは限らない。端点が逆順になる場合は、向き付き定積分として扱う。端点が一致する場合は積分区間がなくなり、値は0になる。

©ミライコーチング

定積分の置換積分

置換$t=g(x)$を行うときは、次の 3 つを同時に変換する。
- 被積分関数
- 微分因子
- 積分区間の両端

定積分では、元の区間$[a,b]$に対して、置換後の端点を

$$x=a \Rightarrow t=g(a)$$

$$x=b \Rightarrow t=g(b)$$

として求める。
置換後の変数tと新しい端点を用いて最後まで計算すれば、元の変数xへ戻す必要はない。
一方で、不定積分を経由して原始関数を求めた後、元の変数xへ戻して元の端点を代入する方法も正しい。定積分の置換では、どちらの方法を使うかを区別して扱うことが重要である。
置換を行う区間では、関数の定義域や連続性を確認する必要がある。また、導関数が端点で0になる場合でも、そこで0で割るような変形をしてはいけない。微分因子の変換は、微分の関係式から正しく行う。

置換積分の手順

定積分の置換では、次の順序で処理する。
1. 置換式を決める。
2. 微分して微分因子を変換する。
3. 被積分関数・微分記号を新しい変数で統一する。
4. 元の上下端を置換式へ代入し、新しい上下端を求める。
5. 新しい変数のまま積分する。

端点を変え忘れたり、変数を混在させたりすると正しい計算にならない。

増加する置換と減少する置換

置換$t=g(x)$の向きは、区間内の変化で判断する。
区間内の任意のx_1, x_2について$x_1<x_2$のとき、 $g(x_1)<g(x_2)$ となる場合を増加する置換という。
一方、 $g(x_1)>g(x_2)$ となる場合を減少する置換という。
両端の値の順序だけで単調性を判断するのではなく、区間内の任意の 2 点の対応を見ることが重要である。
例題で扱う$t=x^2+1$は、区間$[0,1]$で増加する。実際に、$0 \leq x_1<x_2 \leq 1$ならば、 $x_1^2+1<x_2^2+1$ となる。
したがって、端点は $x:0 \to 1$ に対して、 $t:1 \to 2$ と同じ向きに対応する。
一方、$t=2-\sin x$は区間$[0, \frac{\pi}{2}]$で減少する。$0 \leq x_1<x_2 \leq \frac{\pi}{2}$ならば、 $2-\sin x_1>2-\sin x_2$ となる。
したがって、 $x:0 \to \frac{\pi}{2}$ に対して、

$$t:2 \to 1$$

と端点の順序が逆になる。
減少する置換では、

$$dt=-\cos x\,dx$$

のような負号を保持する必要がある。端点の向きと微分因子の符号を合わせて扱い、機械的に絶対値へ置き換えてはいけない。

端点対応の模式図

以下の図は端点対応を理解するための模式図であり、上下の線の長さは共通縮尺を表さない。描画座標は配置用であり、数直線や定量的なグラフを表すものではない。
増加する置換 $t = x^2 + 1$ では、$x : 0 \to 1$ が $t : 1 \to 2$ に対応する。

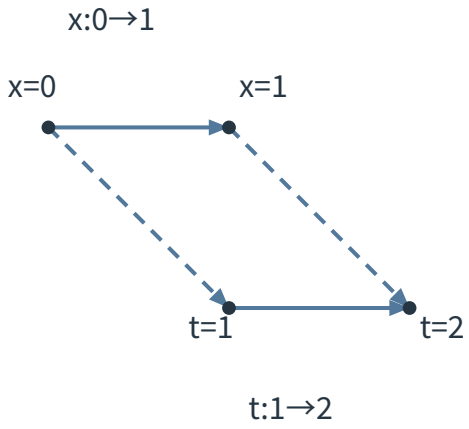

図 1　$t = x^2 + 1$ による増加置換の端点対応

減少する置換 $t = 2 - \sin x$ では、$x : 0 \to \frac{\pi}{2}$ が $t : 2 \to 1$ に対応する。

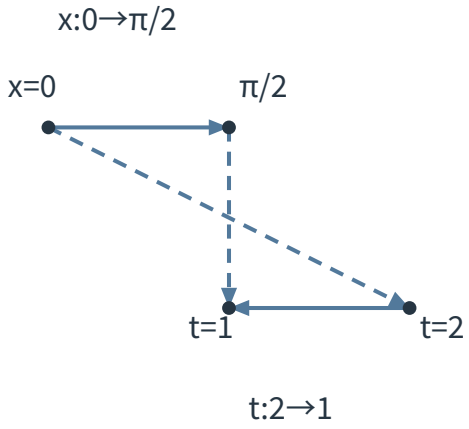

図 2　$t = 2 - \sin x$ による減少置換の端点対応

例題 1：増加する置換の基本

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 2x(x^2+1)^3\,dx$$

例題 1 の解答・解説

置換 $t=x^2+1$ を行う。
微分すると、 $dt=2x\,dx$ となる。
端点を変換すると、

$$x=0 \Rightarrow t=1$$
$$x=1 \Rightarrow t=2$$

である。したがって、

$$\int_0^1 2x(x^2+1)^3\,dx=\int_1^2 t^3\,dt$$

となる。
計算すると、

$$\int_1^2 t^3\,dt=\left[\frac{t^4}{4}\right]_1^2=\frac{16-1}{4}=\frac{15}{4}$$

よって、答えは $\frac{15}{4}$ である。

例題 2：減少する置換の基本

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(2-\sin x)^2\,dx$$

例題 2 の解答・解説

置換 $t = 2 - \sin x$ を行う。
微分すると、 $dt = -\cos x\,dx$ より、 $\cos x\,dx = -dt$ である。
端点を変換すると、

$$x = 0 \Rightarrow t = 2$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$$

となる。
したがって、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(2 - \sin x)^2\,dx = -\int_2^1 t^2\,dt$$

である。
計算すると、

$$-\int_2^1 t^2\,dt = \int_1^2 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{3}$$

よって、答えは $\frac{7}{3}$ である。
減少する置換では、端点の順序が反転することと、微分因子の負号を同時に扱うことが重要である。

例題 3：新しい変数と端点で計算する

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

例題 3 の解答・解説

置換 $t = x^2 + 1$ を行う。
微分すると、 $dt = 2x\,dx$ となる。
端点を変換すると、

$$x = 0 \Rightarrow t = 1$$
$$x = 1 \Rightarrow t = 2$$

である。
したがって、

$$\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{t^2}\,dt$$

となる。
計算すると、

$$\int_1^2 \frac{1}{t^2}\,dt = \int_1^2 t^{-2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

よって、答えは $\frac{1}{2}$ である。
このように、新しい変数tと新しい端点を用いて最後まで計算すれば、元の変数xへ戻す必要はない。

演習問題 1 基本的な増加置換

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 3x^2(x^3+2)^4\,dx$$

演習問題 2 対数を用いる置換

次の定積分を求めよ。ただし、$\ln x$ は自然対数である。

$$\int_1^{e^2} \frac{1}{x}\,dx$$

演習問題 3 微分因子をそろえる置換

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 4x^3(x^4+1)^2\,dx$$

©ミライコーチング

演習問題 4 減少する置換

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(3-\sin x)^2\,dx$$

演習問題 5 置換の誤りを見抜く

次の定積分について、$t=2-x$ と置いた。

$$\int_0^2 x(2-x)^3\,dx$$

ある計算で、

$$\int_0^2 x(2-x)^3\,dx = \int_2^0 t^4\,dt$$

としていた。この計算の誤りを指摘し、正しく計算せよ。

演習問題 6 三角関数の置換

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 x\,dx$$

演習問題 7 根号を含む置換

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

演習問題 8 総合確認

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^2 x\left(x^2+4\right)^2\,dx$$

©ミライコーチング

演習問題 1 の解答・解説

被積分関数の中にx^3+2があり、その微分$3x^2$が含まれているため、$t=x^3+2$ と置く。
微分すると、$dt=3x^2\,dx$ となる。
端点を変換すると、

$$x=0 \Rightarrow t=2$$
$$x=1 \Rightarrow t=3$$

である。
したがって、

$$\int_0^1 3x^2\left(x^3+2\right)^4\,dx=\int_2^3 t^4\,dt$$

となる。
計算すると、

$$\begin{aligned}\int_2^3 t^4\,dt&=\left[\frac{t^5}{5}\right]_2^3\\&=\frac{3^5-2^5}{5}\\&=\frac{211}{5}\end{aligned}$$

よって、答えは$\frac{211}{5}$である。
$t=x^3+2$は区間$[0,1]$で連続であり、置換後の関数も区間上で連続である。

演習問題 2 の解答・解説

被積分関数に$\frac{1}{x}$が現れるため、$t=\ln x$ と置く。
ここで、$\ln x$は自然対数であり、区間$1\le x\le e^2$では$x>0$であるため定義される。
微分すると、$dt=\frac{dx}{x}$ となる。
端点を変換すると、

$$x=1 \Rightarrow t=\ln 1=0$$
$$x=e^2 \Rightarrow t=\ln\left(e^2\right)=2$$

である。
したがって、

$$\int_1^{e^2}\frac{1}{x}\,dx=\int_0^2 1\,dt$$

となる。
計算すると、

$$\int_0^2 1\,dt=2$$

よって、答えは2である。
区間上で$x>0$が成立し、置換関数と被積分関数が連続であることを確認している。

演習問題 3 の解答・解説

$(x^4+1)^2$の内部の微分$4x^3$が含まれているため、 $t=x^4+1$ と置く。
微分すると、 $dt=4x^3\,dx$ となる。
端点を変換すると、

$$x=0 \Rightarrow t=1$$
$$x=1 \Rightarrow t=2$$

である。
したがって、

$$\int_0^1 4x^3(x^4+1)^2\,dx=\int_1^2 t^2\,dt$$

となる。
計算すると、

$$\begin{aligned}\int_1^2 t^2\,dt&=\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2\\&=\frac{8-1}{3}\\&=\frac{7}{3}\end{aligned}$$

よって、答えは$\frac{7}{3}$である。

演習問題 4 の解答・解説

$\sin x$の微分にあたる$\cos x$が含まれているため、 $t = 3 - \sin x$ と置く。
微分すると、 $dt = -\cos x\, dx$ となるので、 $\cos x\, dx = -dt$ である。
端点を変換すると、

$$x = 0 \Rightarrow t = 3$$
$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 2$$

である。
したがって、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(3 - \sin x)^2\, dx = -\int_3^2 t^2\, dt$$

となる。
計算すると、

$$\begin{aligned} -\int_3^2 t^2\, dt &= \int_2^3 t^2\, dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3}\right]_2^3 \\ &= \frac{27 - 8}{3} \\ &= \frac{19}{3} \end{aligned}$$

よって、答えは$\frac{19}{3}$である。
減少する置換では、端点の順序が逆になるため、微分因子の負号を正しく扱う必要がある。

演習問題 5 の解答・解説

$t = 2 - x$と置く。
このとき、

$$x = 2 - t$$

であり、 $dt = -dx$ より、 $dx = -dt$ となる。
端点を変換すると、

$$x = 0 \Rightarrow t = 2$$
$$x = 2 \Rightarrow t = 0$$

である。
提示された

$$\int_0^2 x(2 - x)^3\, dx = \int_2^0 t^4\, dt$$

という式には 2 つの誤りがある。
1 つ目は、$x = 2 - t$であるにもかかわらず、xをtとして扱っており、被積分関数の変換を誤っていることである。

2 つ目は、$dx = -dt$であるのに負号を落としていることである。
正しく変換すると、

$$\begin{aligned}\int_0^2 x(2-x)^3\,dx &= \int_2^0 (2-t)t^3(-dt)\\ &= \int_0^2 (2-t)t^3\,dt\end{aligned}$$

となる。
計算すると、

$$\begin{aligned}\int_0^2 (2-t)t^3\,dt &= \int_0^2 (2t^3-t^4)\,dt\\ &= \left[\frac{t^4}{2}-\frac{t^5}{5}\right]_0^2\\ &= 8-\frac{32}{5}\\ &= \frac{8}{5}\end{aligned}$$

よって、答えは$\frac{8}{5}$である。

演習問題 6 の解答・解説

$\cos x$の微分は$-\sin x$であり、元の被積分関数にある$+\sin x$とは符号が反対であるため、$-\sin x\,dx$を作ることで微分因子を対応させることができる。この符号を考慮して、$t = \cos x$と置く。
微分すると、 $dt = -\sin x\,dx$ となる。
端点を変換すると、

$$x = 0 \Rightarrow t = 1$$
$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$$

である。
したがって、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 x\,dx = -\int_1^0 t^2\,dt$$

となる。
計算すると、

$$\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}$$

よって、答えは$\frac{1}{3}$である。

演習問題 7 の解答・解説

x^2+1の微分にあたる$2x$が含まれているため、 $t=x^2+1$ と置く。
微分すると、 $dt=2x\,dx$ となる。
端点を変換すると、

$$x=0 \Rightarrow t=1$$
$$x=1 \Rightarrow t=2$$

である。
したがって、

$$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

となる。
計算すると、

$$\int_1^2 t^{-\frac{1}{2}}\,dt=\left[2\sqrt{t}\right]_1^2$$
$$=2\sqrt{2}-2$$

よって、答えは$2\sqrt{2}-2$である。
区間$[0,1]$では$x^2+1>0$であり、根号内部と置換後のtはともに正である。

演習問題 8 の解答・解説

$(x^2+4)^2$の内部の式x^2+4を微分すると$2x$となり、元の被積分関数にあるxはその$\frac{1}{2}$倍である。この係数を調整して微分因子を対応させるため、$t=x^2+4$と置く。
微分すると、 $dt=2x\,dx$ より、 $x\,dx=\frac{1}{2}dt$ となる。
端点を変換すると、

$$x=0 \Rightarrow t=4$$
$$x=2 \Rightarrow t=8$$

である。
したがって、

$$\int_0^2 x(x^2+4)^2\,dx=\frac{1}{2}\int_4^8 t^2\,dt$$

となる。
計算すると、

$$\frac{1}{2}\int_4^8 t^2\,dt=\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_4^8$$
$$=\frac{8^3-4^3}{6}$$
$$=\frac{224}{3}$$

よって、答えは$\frac{224}{3}$である。