

第 163 講 区間推定

学習目標

この講では、指定した信頼度で母平均を推定する区間の作り方と、その解釈を理解することを目指す。

具体的には、次のことができるようになる。

- ・ 標本平均 $\bar{X}$ の分布を利用して母平均 μ の区間推定を考えられる。
- ・ 95%信頼区間や99%信頼区間が何を意味するか説明できる。
- ・ 観測後の具体的な区間 $[\bar{x} - d, \bar{x} + d]$ を求め、半幅と全幅を区別できる。

区間推定とは何か

区間推定とは、標本をもとに未知の母平均を推定する区間を、指定した信頼度をもつ方法で作ることである。

ただし、作られた区間が必ず母平均という真の値を含むことを保証するものではない。

この講では、母平均 μ は未知ではあるが固定された実数として扱う。一方、標本を取り出す前の区間の両端は標本平均 $\bar{X}$ によって変化するため、ランダムな値である。

母平均を含む区間を作る考え方

区間推定で重要なのは、個々の観測値の範囲を調べるのではなく、母集団全体の平均 μ をどの範囲で捉えるかを考えることである。

この講では、次の正規母集団モデルを扱う。

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (i = 1, \dots, n)$$

ここで、 μ は未知の固定された実数、 $\sigma > 0$ は既知の値、 n は正整数である。また、 $X_1, \dots, X_n$ は独立であるとする。

第 162 講で学んだように、標本平均は

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

であり、標準化すると

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

となる。

標準正規分布について、 $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) \approx 0.95$

$P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) \approx 0.99$ が成り立つ。

ここで使う 1.96 や 2.58 は臨界値を丸めた値である。そのため、正確に95%や99%ではなく、「約95%」「約99%」である。

母平均を含む区間の導出

まず、

$$-1.96 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 1.96$$

を考える。

$\sigma > 0$ 、 n は正整数なので、

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} > 0$$

である。したがって、不等式の向きは変わらず両辺に $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ を掛けることができる。

$$-1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

両辺を整理すると、

$$\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

となる。

つまり、抽出前のランダムな区間

$$\left[\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

が固定された母平均 μ を含む確率は約0.95である。

$$\begin{aligned} P\left(\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ = P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) \\ \approx 0.95 \end{aligned}$$

この式は、抽出前のランダムな区間が固定された母平均 μ を含む確率、すなわち被覆確率が約0.95であることを表している。

実際に標本を取り、標本平均が $\bar{x}$ と決まった後は、区間の両端も固定され、

$$\left[\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

という具体的な区間になる。

この区間の半分の長さを半幅といい、

$$d = 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

である。また、区間全体の長さを全幅といい、 $2d$ である。

信頼度の正しい解釈

「約95%信頼区間」という表現は、区間を作る方法の性質を表している。

同じ母集団・同じ条件で独立に標本を取り、同一の方法で区間を作り続けたとき、その方法で作られた区間が母平均 μ を含む割合は長期的に約95%になる。

例えば100本の区間を作る場合でも、必ず95本が母平均を含むわけではない。また、有限回の実験で約95本になることが保証されるわけでもない。

観測後に得られた1つの固定された区間について、「固定された母平均 μ がこの区間に入る確率が95%である」と解釈してはいけない。

また、信頼区間は個々の観測値の約95%が入る範囲を表すものでもない。信頼区間が推定している対象は母平均 μ である。

例題で共通して用いる条件

以後の例題では、断りが無い限り独立な正規母集団モデル

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($i = 1, \dots, n$)を考える。

ここで、 $\sigma > 0$ は既知、 μ は未知の固定された実数、 n は正整数である。

また、例題中の数値は架空の学習モデルである。

約95%信頼区間では係数1.96、約99%信頼区間では係数2.58を用いる。これらは臨界値を丸めた本講での係数であり、被覆確率はそれぞれ約0.95、約0.99として扱う。

例題 1

母標準偏差が $\sigma = 10$ 、標本の大きさが $n = 100$ である標本から、標本平均 $\bar{x} = 50$ が得られた。母平均 μ の約95%信頼区間を求め、意味を説明しなさい。

例題 1 の解答・解説

母標準偏差は既知で $\sigma = 10$ 、標本の大きさは $n = 100$ である。

まず、標準誤差を求める。

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{100}} = 1$$

したがって、約95%信頼区間の半幅は、 $d = 1.96 \times 1 = 1.96$ である。

観測後の標本平均は $\bar{x} = 50$ なので、推定結果は、 $[50 - 1.96, 50 + 1.96]$ となる。

計算すると、 $[48.04, 51.96]$ である。

また、全幅は、 $2 \times 1.96 = 3.92$ である。

この区間は、観測後に得られた1つの固定された区間である。

約95%という信頼度は、同じ条件で独立な標本抽出と区間作成を繰り返したとき、その方法で作った区間が母平均 μ を含む割合が長期的に約95%になることを意味する。

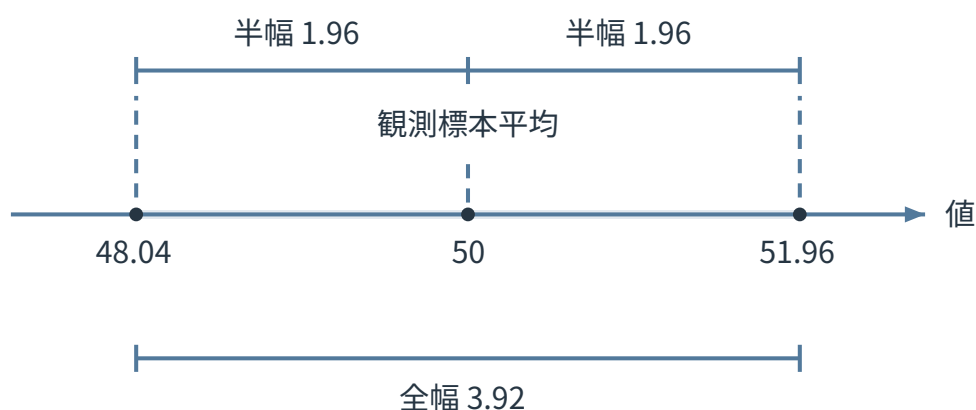


図 1 $\sigma=10$ 、 $n=100$ で観測後に得た 95% 信頼区間の一例であり、中心 50 は観測標本平均である。係数 1.96 は丸めた値として用いた。95% は同じ手順で区間を作る方法の信頼度を表し、真の母平均の位置はこの図には示していない。

例題 2

母標準偏差が $\sigma = 4$ 、標本の大きさが $n = 64$ 、標本平均が $\bar{x} = 20$ である。
母平均 μ の約95%信頼区間と約99%信頼区間をそれぞれ求め、信頼度を高くしたときの区間の変化を説明しなさい。

例題 2 の解答・解説

母標準偏差は既知で $\sigma = 4$ 、標本の大きさは $n = 64$ である。
まず標準誤差を求める。

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{64}} = 0.5$$

約95%信頼区間では係数1.96を使う。

半幅は、 $d = 1.96 \times 0.5 = 0.98$ である。

したがって、 $[20 - 0.98, 20 + 0.98]$ より、 $[19.02, 20.98]$ となる。

約99%信頼区間では係数2.58を使う。

半幅は、 $d = 2.58 \times 0.5 = 1.29$ である。

したがって、 $[20 - 1.29, 20 + 1.29]$ より、 $[18.71, 21.29]$ となる。

同じ標本、同じ σ 、同じ n を使っても、信頼度を高くすると係数が1.96から2.58へ大きくなるため、区間は広がる。

例題 3

母標準偏差が $\sigma = 10$ である。約95%信頼区間の半幅を1以下にしたい。
必要な標本の大きさ n の最小の整数値を求めなさい。

例題3の解答・解説

約95%信頼区間の半幅は、

$$d = 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

である。

半幅を1以下にしたいので、

$$1.96 \frac{10}{\sqrt{n}} \leq 1$$

となる。

整理すると、

$$\frac{19.6}{\sqrt{n}} \leq 1$$

である。

n は正整数なので $\sqrt{n} > 0$ であり、両辺に $\sqrt{n}$ を掛けても不等号の向きは変わらない。

$19.6 \leq \sqrt{n}$ となる。

両辺を2乗すると、 $19.6^2 \leq n$ より、 $384.16 \leq n$ である。

n は正整数なので、条件を満たす最小値へ切り上げる。

したがって、 $n = 385$ である。

ここで求めた条件は区間全体の長さではなく、半幅を1以下にする条件である。

また、既知の σ を用いる場合、半幅は $\frac{1}{\sqrt{n}}$ に比例して小さくなる。しかし、標本ごとに作られる個々の区間が必ず母平均 μ を含むことを保証するものではない。

演習問題

練習問題1

本講で扱う独立な正規母集団モデルを考える。母標準偏差は既知で $\sigma = 6$ 、標本の大きさは $n = 36$ であり、観測後の標本平均は $\bar{x} = 100$ であった。

母平均 μ の約95%信頼区間を求め、半幅と全幅も求めなさい。

ただし、数値は架空の学習モデルであり、1.96を約95%の係数として用いる。

練習問題1の解答・解説

本講の条件より、母標準偏差 σ は既知である。

標準誤差は、

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{36}} = \frac{6}{6} = 1$$

である。

したがって半幅は、 $d = 1.96 \times 1 = 1.96$ となる。

よって、約95%信頼区間は、 $[100 - 1.96, 100 + 1.96]$ である。

したがって、 $[98.04, 101.96]$ となる。

半幅は1.96、全幅は、 $2 \times 1.96 = 3.92$ である。

ここで95%は、同じ条件で標本抽出と区間作成を繰り返したとき、その方法で作った区間が母平均を含む割合が長期的に約95%になることを表す。

練習問題 2

本講で扱う独立な正規母集団モデルを考える。母標準偏差は既知で $\sigma = 5$ 、標本の大きさは $n = 100$ であり、観測後の標本平均は $\bar{x} = 12$ であった。

母平均 μ の約95%信頼区間を求めなさい。

ただし、数値は架空の学習モデルであり、1.96を約95%の係数として用いる。

練習問題 2 の解答・解説

標準誤差を求める。

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10} = 0.5$$

である。

半幅は、 $d = 1.96 \times 0.5 = 0.98$ となる。

したがって、約95%信頼区間は、 $[12 - 0.98, 12 + 0.98]$ である。

よって、 $[11.02, 12.98]$ となる。

この区間は、観測後に得られた固定された区間である。一方、抽出前には区間の両端が確率変数であり、母平均を含むかどうかを確率的に考えている。

練習問題 3

本講で扱う独立な正規母集団モデルを考える。母標準偏差は既知で $\sigma = 10$ である。

観測後の標本平均が $\bar{x} = 50$ であったと仮定する。

(1) $n = 100$ の場合の約95%信頼区間を求めなさい。

(2) $n = 400$ の場合の約95%信頼区間を求めなさい。

(3) それぞれの半幅と全幅を比較し、標本の大きさを増やしたときの変化を説明しなさい。

ただし、この比較では同じ観測平均 $\bar{x} = 50$ を仮定している。実際に標本の大きさを増やした標本平均が常に50になる保証はない。

練習問題 3 の解答・解説

(1) $n = 100$ の場合を考える。

標準誤差は、

$$\frac{10}{\sqrt{100}} = 1$$

である。

半幅は、 $d = 1.96 \times 1 = 1.96$ となる。

したがって、 $[50 - 1.96, 50 + 1.96]$ より、 $[48.04, 51.96]$ である。

全幅は、3.92である。

(2) $n = 400$ の場合を考える。

標準誤差は、

$$\frac{10}{\sqrt{400}} = \frac{10}{20} = 0.5$$

である。

半幅は、 $d = 1.96 \times 0.5 = 0.98$ となる。

したがって、 $[50 - 0.98, 50 + 0.98]$ より、 $[49.02, 50.98]$ である。

全幅は、1.96である。

(3) 半幅の比を比較すると、 $1.96 : 0.98 = 2 : 1$ である。

全幅も、 $3.92 : 1.96 = 2 : 1$ となる。

標本の大きさ n を増やすと、半幅は $\frac{1}{\sqrt{n}}$ に比例して小さくなる。

ただし、ここでの比較は同じ観測平均 $\bar{x} = 50$ を仮定した学習上の比較である。実際に標本の大きさを変えて標本抽出を行うと、標本平均は確率変数 $\bar{X}$ であり、常に50になるわけではない。

練習問題 4

本講で扱う独立な正規母集団モデルを考える。母標準偏差は既知で $\sigma = 3$ 、標本の大きさは $n = 9$ であり、観測後の標本平均は $\bar{x} = -2$ であった。

母平均 μ の約95%信頼区間を求めなさい。

ただし、数値は架空の学習モデルであり、1.96を約95%の係数として用いる。

練習問題 4 の解答・解説

標準誤差は、

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$$

である。

半幅は、 $d = 1.96 \times 1 = 1.96$ となる。

したがって、信頼区間は、 $[-2 - 1.96, -2 + 1.96]$ である。

よって、 $[-3.96, -0.04]$ となる。

負の値を含む場合でも、下端と上端の順序を確認して区間表記することが重要である。

練習問題 5

本講で扱う独立な正規母集団モデルを考える。母標準偏差は既知で $\sigma = 8$ である。

約95%信頼区間の半幅を2以下にしたい。必要な標本の大きさ n の最小の正整数値を求めなさい。

ただし、数値は架空の学習モデルであり、1.96を約95%の係数として用いる。

練習問題 5 の解答・解説

半幅は、

$$d = 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

である。

条件より、

$$1.96 \frac{8}{\sqrt{n}} \leq 2$$

となる。

整理すると、

$$\frac{15.68}{\sqrt{n}} \leq 2$$

である。

n は正整数なので $\sqrt{n} > 0$ であり、不等式を変形できる。

$15.68 \leq 2\sqrt{n}$ より、 $7.84 \leq \sqrt{n}$ となる。

両辺は正なので 2 乗できる。

$$61.4656 \leq n$$

したがって、最小の正整数は切り上げて、 $n = 62$ である。

求めた条件は半幅についての条件であり、全幅を 2 以下にする条件ではない。

練習問題 6

約 95% 信頼区間について、次の説明を判定しなさい。

- (1) 「今回作った 1 つの区間が母平均を必ず含む」
- (2) 「同じ方法で 100 個の区間を作れば、必ず 95 個が母平均を含む」
- (3) 「同じ母集団・同じ条件で独立な標本から区間作成を続ける方式では、長期的な被覆率が約 95% になる」

正しい説明と誤った説明を分け、理由を説明しなさい。

練習問題 6 の解答・解説

- (1) 「今回作った 1 つの区間が母平均を必ず含む」

誤りである。

観測後の区間は固定された区間であり、その区間が母平均 μ を必ず含むことは保証されない。

- (2) 「同じ方法で 100 個の区間を作れば、必ず 95 個が母平均を含む」

誤りである。

有限回の 100 個について、必ず 95 個になるという保証はない。長期的に繰り返したとき、その方法で作った区間が母平均を含む割合が約 95% になるという意味である。

- (3) 「同じ母集団・同じ条件で独立な標本から作り続ける方式の長期の被覆率が約 95% になる」

正しい。

抽出前では区間の両端が確率変数であり、固定された母平均 μ を含む割合を考える。観測後の 1 つの区間に対して、母平均が入る確率 95% と解釈するものではない。

練習問題 7

次の説明が正しいか判定し、理由を説明しなさい。
「95% 信頼区間の中には、母集団の個々の観測値が約 95% 入る」

練習問題 7 の解答・解説

この説明は誤りである。
95% 信頼区間は、母平均 μ を推定するための区間であり、個々の観測値が入る範囲を表していない。
個々の観測値のばらつきを考える場合と、母平均を推定する場合では目的が異なる。
この講で扱う区間推定は、標本平均 $\bar{x}$ から母平均 μ を推定する方法である。
したがって、「観測値の約 95% が入る範囲」と解釈してはいけない。

練習問題 8

本講では、独立な正規母集団モデルにおいて母標準偏差 σ が既知である場合を扱う。
しかし、ある標本では σ が未知であり、標本の大きさは $n = 9$ 、標本から計算した標準偏差は $s = 2$ であった。
この s を既知の σ の代わりに使うことで、 σ 既知の場合と同じ被覆率を保証できるか判断し、理由を説明しなさい。

練習問題 8 の解答・解説

σ 既知の場合と同じ被覆率を保証できるとはいえない。
本講の区間推定では、母標準偏差 σ が既知であることを条件としている。
その理由は、

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

が標準正規分布に従うことを利用しているためである。
今回与えられた $s = 2$ は、標本から計算した標準偏差の推定値であり、母標準偏差 σ とたまたま数値が一致する可能性はあっても、それによって σ が既知になったわけではない。
したがって、 s を σ の代わりにそのまま使っても、本講で扱った標準正規化の根拠は成り立たず、 σ 既知の場合と同じ被覆率を保証することはできない。
この講では、未知の σ を扱う別の方法は扱わない。