

## 第 122 講 対数関数とグラフ

### 学習目標

- ・ 対数関数  $y = \log_a x$  の定義域・値域・代表的な性質を、指数関数との関係から説明できる。
- ・ 底  $a$  の値による増減の違いと、グラフの変化を判断できる。
- ・ 指数関数  $y = a^x$  と対数関数  $y = \log_a x$  の対称性を区別して説明できる。
- ・ 対数関数の定義域や漸近線について、図の見た目ではなく定義から判断できる。

### 対数関数を考える理由

指数関数  $y = a^x$  は、入力  $x$  を指数に入れると出力  $y$  が決まる関数である。

一方、対数関数はその逆向きの対応を考える関数である。つまり、ある数  $x$  が  $a$  の何乗で表されるかを表す。

対数の定義は、次の指数表示と同じ意味を持つ。

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

この関係から、対数関数の性質は指数関数の性質を反映して決まる。

対数関数を見るときの中心となる判断軸は、「真数  $x$  がどの範囲を動き、そのとき指数  $y$  がどのように変化するか」である。

### 対数関数の定義

$a > 0$ 、 $a \neq 1$  のとき、対数関数  $y = \log_a x$  を、 $x > 0$  のもとで  $x = a^y$  を満たす唯一の実数  $y$  として定義する。

条件  $a > 0$  は指数関数  $a^y$  が正の値をとるために必要である。

また、 $a = 1$  の場合は、 $1^y = 1$  となり、どのような  $y$  を選んでも同じ値しか得られない。そのため、入力  $x$  に対して対応する  $y$  を一意に決める逆対応を作ることができない。

したがって、対数関数では  $a > 0$ 、 $a \neq 1$  を条件とする。

### 定義域・値域・代表点

対数関数  $y = \log_a x$  は、 $x = a^y$  を満たす  $y$  を表している。

指数関数  $y = a^x$  は、 $a > 0$ 、 $a \neq 1$  のとき、値域が正の数全体であり、厳密単調性をもつ。

したがって、 $a^y$  は常に正であるため、 $x = a^y > 0$  となり、対数関数の定義域は  $x > 0$  である。

さらに、指数関数の値域が正の数全体であるため、任意の  $x > 0$  に対して、 $x = a^y$  を満たす実数  $y$  が唯一存在する。

よって、対数関数はすべての正の数を入力として受け取ることができる。

また、任意の実数  $y$  を選べば、 $x = a^y > 0$  となるため、その  $y$  は対数関数の値として実現する。

したがって値域は、 $\mathbb{R}$  すなわち実数全体である。

特に、 $1 = a^0$  より、 $\log_a 1 = 0$  となるため、グラフは必ず点  $(1, 0)$  を通る。

一方、 $x = 0$  は真数条件  $x > 0$  に反するため、グラフは  $y$  軸と交わらない。

### 底による増減の違い

底  $a$  が 1 より大きい場合、指数関数  $y = a^x$  は指数が大きくなるほど値が大きくなる。

例えば、 $a^p < a^q$  ( $p < q$ ) である。

この関係を逆向きに見ると、 $\log_a a^p = p$ 、 $\log_a a^q = q$  であり、入力が大きくなるほど出力も大きくなる。

したがって、 $a > 1 \Rightarrow y = \log_a x$  は厳密増加となる。

一方、 $0 < a < 1$  では指数関数は指数が大きくなるほど値が小さくなる。

$p < q \Rightarrow a^p > a^q$ であるため、逆対応である対数関数では入力が大きくなるほど出力が小さくなる。  
したがって、 $0 < a < 1 \Rightarrow y = \log_a x$  は厳密減少となる。

### 無限大・0 への近づき方と漸近線

ここで、 $\infty$  や  $-\infty$  は実数の値を表すのではなく、値が限りなく大きくなることや負の方向へ限りなく小さくなる様子を表す記号である。

対数関数の変化は、指数表示  $x = a^y$  から考える。

$a > 1$  の場合、指数  $y$  が大きくなるほど  $a^y$  は限りなく大きくなる。また、 $y$  が小さくなるほど  $a^y$  は 0 に限りなく近づく。

したがって、 $x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \infty$  であり、 $x \rightarrow 0+ \Rightarrow y \rightarrow -\infty$  となる。

ここで  $x \rightarrow 0+$  とは、 $x$  が負になることなく、正の側から 0 に限りなく近づくことを意味する。

一方、 $0 < a < 1$  の場合は、指数  $y$  が限りなく大きくなると  $a^y$  は 0 へ正の側から近づき、指数  $y$  が負の方向へ限りなく小さくなると  $a^y$  は限りなく大きくなる。

したがって、 $x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty$  であり、 $x \rightarrow 0+ \Rightarrow y \rightarrow \infty$  となる。

どちらの場合も、 $x$  が 0 に近づくと  $|y|$  は限りなく大きくなる。そのため、グラフは直線  $x = 0$  に近づき続け、 $x = 0$  を縦の漸近線といえる。

ただし、これは単に  $x = 0$  が定義域に含まれないからではない。漸近線は、グラフがある直線へ限りなく近づくときの振る舞いで判断する。

また、 $x = 0$  が定義域に含まれない理由は、真数条件  $x > 0$  によるものであり、漸近線になる理由とは分けて考える。

### 指数関数との対称性

指数関数  $y = a^x$  と対数関数  $y = \log_a x$  は逆関数の関係にある。

指数関数で点  $(u, v)$  が  $v = a^u$  を満たすならば、対数関数では  $u = \log_a v$  となる。

つまり、点の座標が入れ替わる。

$$(u, v) \leftrightarrow (v, u)$$

したがって、2 つのグラフは直線  $y = x$  に関して対称になる。

これは「指数関数と対数関数の逆対応による対称性」である。

### 底が逆数になる場合の対称性

$y = \log_2 x$  と  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  の関係は、底の変換から考える。

底の変換公式より、次のように計算する。

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}}$$

ここで、 $\log_2 \frac{1}{2} = -1$  だから、 $\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$  となる。

つまり、同じ  $x$  に対して  $y$  の符号だけが反対になる。

したがって、対応する点は  $(x, y) \leftrightarrow (x, -y)$  となり、2 つのグラフは  $x$  軸、すなわち直線  $y = 0$  に関して対称である。

これは底が逆数になることで起こる反射である。

一方、指数関数  $y = a^x$  と対数関数  $y = \log_a x$  の関係では、座標が交換されるため、直線  $y = x$  に関して対称になる。

$x$  軸に関する対称性と、直線  $y = x$  に関する対称性は別の仕組みである。

**例題 1：対数関数の基本性質**

$y = \log_2 x$  について、次の問いに答えなさい。

- (1) グラフが通る代表的な 5 点を求めなさい。
- (2) 定義域と値域を答えなさい。
- (3) 増減を答えなさい。

**例題 1 の解答・解説**

(1)  $x = 2^y$  として考える。

$y = -2, -1, 0, 1, 2$  を代入すると、 $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$  となる。

したがって、代表点は  $(\frac{1}{4}, -2)$ 、 $(\frac{1}{2}, -1)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(2, 1)$ 、 $(4, 2)$  である。

(2) 対数の定義より真数は正であるから、 $x > 0$  である。

また、指数  $y$  はすべての実数をとれるため、値域は実数全体である。

(3) 底が 2 であり、 $2 > 1$  であるから、指数関数は増加する。

その逆関数である対数関数も厳密増加である。

よって、 $y = \log_2 x$  は厳密増加である。

判断のポイントは、底が 1 より大きいかどうかを見ることである。

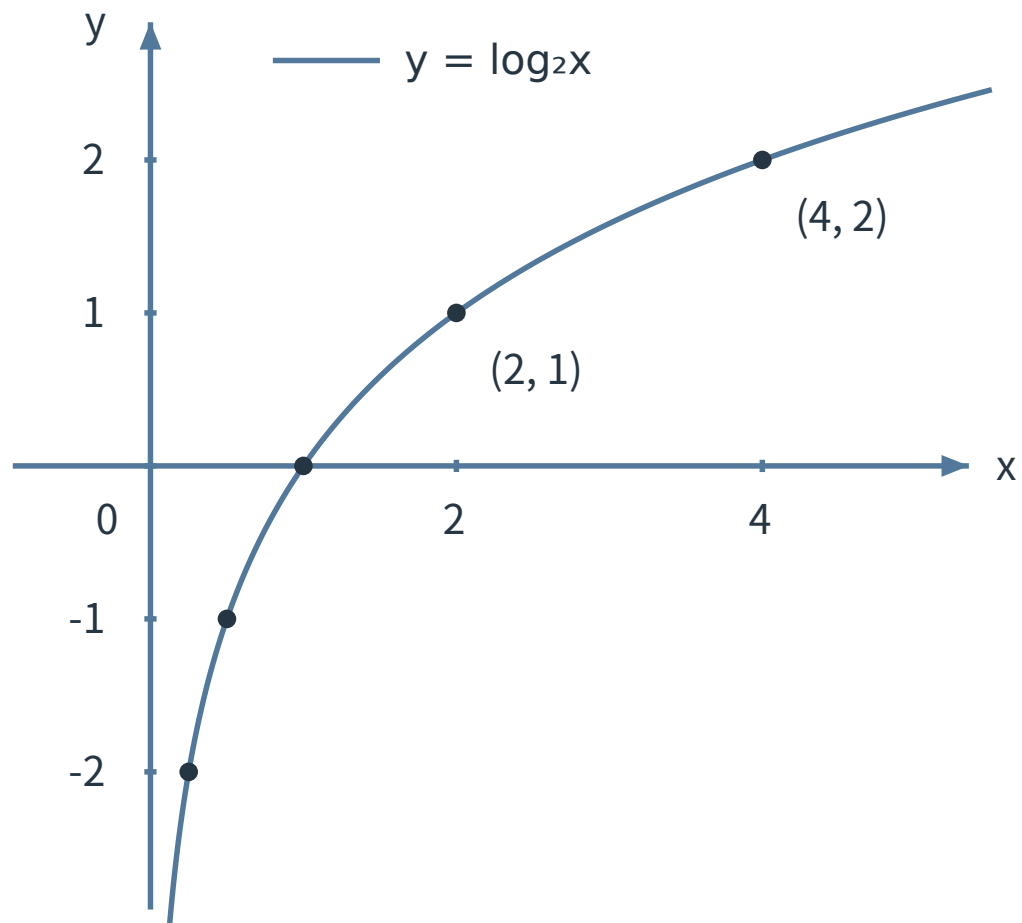


図1 実線は  $y = \log_2 x$ 。代表点は  $(\frac{1}{4}, -2)$ 、 $(\frac{1}{2}, -1)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(2, 1)$ 、 $(4, 2)$ 。定義域は  $x > 0$ 。縦軸  $x = 0$  は漸近線で、曲線は交わらない。表示窓の端に点は付けない。

### 例題2：底が $1/2$ の対数関数

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$  について、定義域が  $\frac{1}{4} \leq x \leq 4$  のときの最大値と最小値を求めなさい。

## 例題 2 の解答・解説

底が  $0 < \frac{1}{2} < 1$  であるため、この対数関数は厳密減少する。  
 したがって、閉区間では左端で最大値、右端で最小値をとる。  
 最大値は、 $x = \frac{1}{4}$  のときである。

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

より、 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$  である。

最小値は、 $x = 4$  のときである。

$$4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

より、 $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$  となる。

したがって、最大値は 2、最小値は  $-2$  である。

ここで注意すべき点は、対数の値が負になることは問題ないことである。真数  $x$  が正であることだけが必要である。

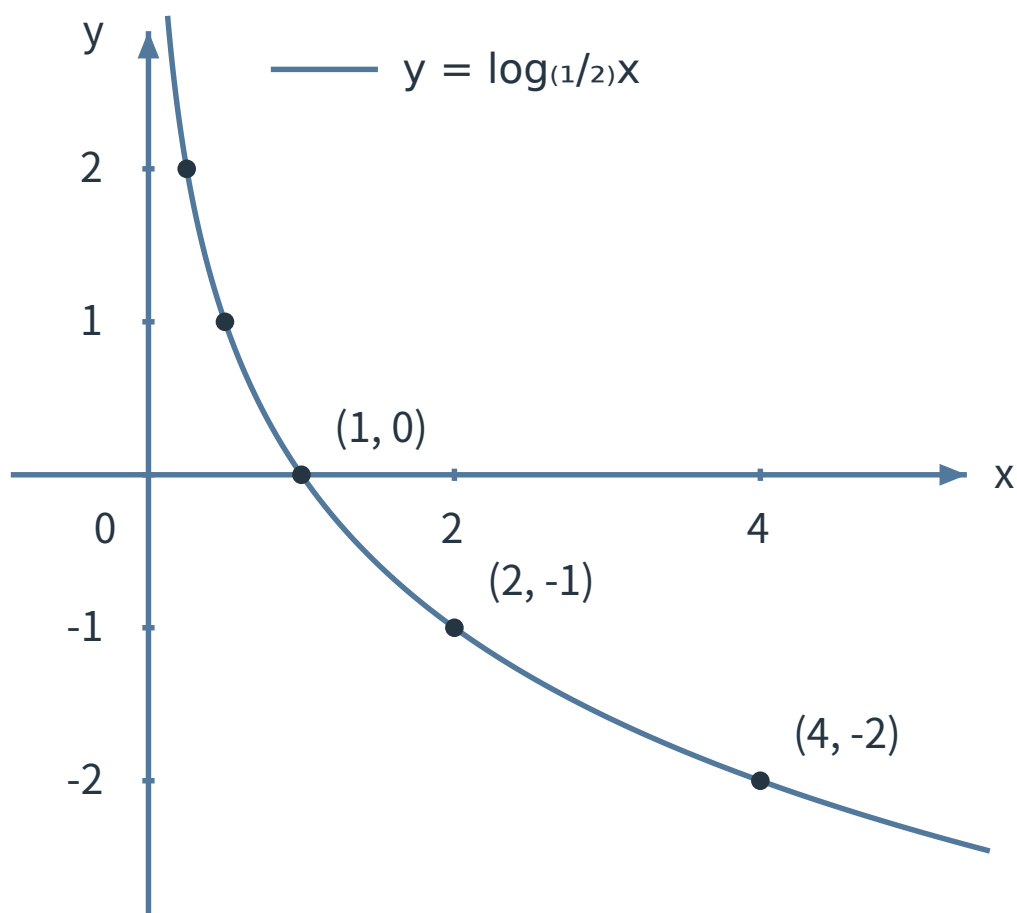


図2 実線は  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 。代表点は  $(\frac{1}{4}, 2)$ 、 $(\frac{1}{2}, 1)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(2, -1)$ 、 $(4, -2)$ 。定義域は  $x > 0$ 。図はグラフ全体の一部であり、定義域を表示範囲に制限するものではない。縦軸  $x = 0$  は漸近線で、曲線は交わらない。図1とは  $x$  軸について対称。

**例題 3：指数関数との対応**

指数関数  $y = 2^x$  と対数関数  $y = \log_2 x$  について、点の対応関係を説明しなさい。  
特に、点  $(2, 4)$  と  $(0, 1)$  がどのように対応するか答えなさい。

**例題 3 の解答・解説**

指数関数と対数関数は逆関数の関係にある。

指数関数上の点  $(u, v)$  があるとき、 $v = 2^u$  である。

この式を対数表示にすると、 $u = \log_2 v$  となる。

したがって、対数関数上では座標が入れ替わった  $(v, u)$  に対応する。

点  $(2, 4)$  について、 $4 = 2^2$  であるから、対数関数では  $(4, 2)$  に対応する。

また、 $1 = 2^0$  より、点  $(0, 1)$  は  $(1, 0)$  に対応する。

この対応は直線  $y = x$  に関する反射であり、底の逆数による  $x$  軸対称とは異なる。

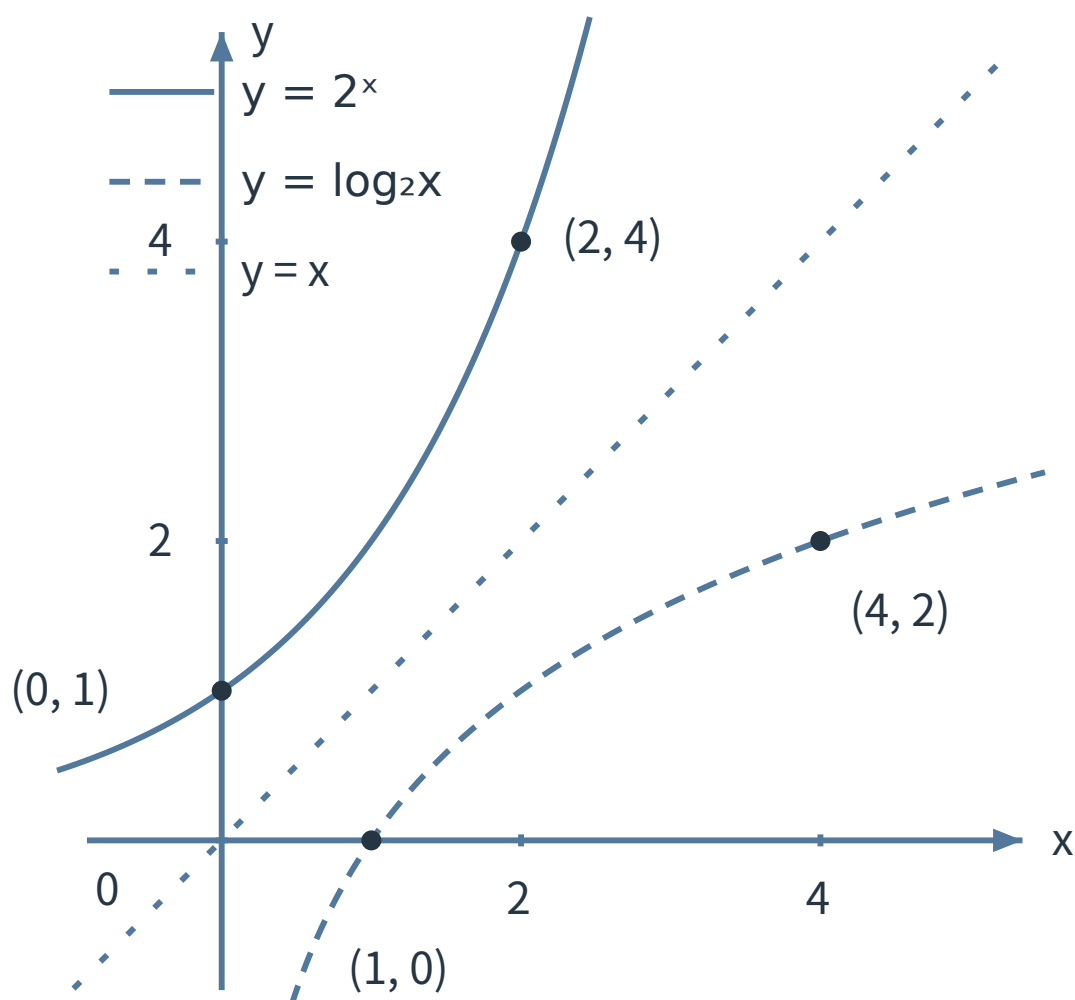


図 3 実線  $y = 2^x$  と長い破線  $y = \log_2 x$  は、短い破線  $y = x$  について対称。対応する点は  $(2, 4) \leftrightarrow (4, 2)$ 、 $(0, 1) \leftrightarrow (1, 0)$ 。指数関数の定義域は実数全体、対数関数の定義域は  $x > 0$ 。

**練習問題 1 底 3 の対数関数の性質**

$y = \log_3 x$  について、次の問いに答えなさい。

- (1) グラフが通る代表的な 5 点を求めなさい。
- (2) 定義域と値域を答えなさい。
- (3) 増減を答え、その理由を指数関数との関係から説明しなさい。

**練習問題 2 底  $\frac{1}{3}$  の対数関数**

$y = \log_{\frac{1}{3}} x$  について、次の問いに答えなさい。

- (1) グラフが通る代表的な 5 点を求めなさい。
- (2) 増減を答えなさい。
- (3) 閉区間  $\frac{1}{9} \leq x \leq 3$  における最大値と最小値を求めなさい。

**練習問題 3 底による増減の比較**

次の対数関数について、増加関数か減少関数かを答えなさい。

- (1)  $y = \log_3 x$
- (2)  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

また、それぞれの理由を底の条件から説明しなさい。

**練習問題 4 真数条件と値域**

対数関数  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$  について、次の問いに答えなさい。

- (1) 定義域を答えなさい。
- (2) 値域がすべての実数である理由を、指数表示  $x = (\frac{1}{3})^y$  を用いて説明しなさい。
- (3)  $x$  が正であれば、 $y$  が負になることがあるか答えなさい。

**練習問題 5 指数関数との反射**

指数関数  $y = 2^x$  と対数関数  $y = \log_2 x$  について答えなさい。

- (1) 指数関数上の点 (3, 8) は、対数関数上のどの点に対応するか。
- (2) この 2 つのグラフがどの直線に関して対称になるか答えなさい。
- (3) その理由を座標の交換から説明しなさい。

**練習問題 6 底の逆数による反射**

$y = \log_2 x$  と  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  について答えなさい。

- (1)  $y = \log_2 x$  が点 (4, 2) を通ることを確認しなさい。
- (2)  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$  では対応する点がどこになるか答えなさい。
- (3) 2 つのグラフの対称軸を答え、その理由を説明しなさい。

**練習問題 7 漸近線の理由**

次の説明について、結論と理由をそれぞれ判断しなさい。

「 $y = \log_2 x$  では  $x = 0$  で定義されないので、 $x = 0$  が縦の漸近線である。」

この説明の不十分な点を述べ、正しい理由を説明しなさい。

**練習問題 8 対数関数のグラフの総合判断**

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$  について、次の問いに答えなさい。

(1) 代表点  $(\frac{1}{4}, 2)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(4, -2)$  がグラフ上にあることを確認しなさい。

(2)  $x \rightarrow 0+$  のとき、 $y$  はどのように変化するか。

(3)  $x \rightarrow \infty$  のとき、 $y$  はどのように変化するか。

(4)  $x = 0$  が定義域に含まれない理由を説明しなさい。

**練習問題 1 の解答・解説**

(1)  $x = 3^y$  として考える。

$y = -2, -1, 0, 1, 2$  を代入すると、 $x = \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9$  となる。

したがって代表点は、 $(\frac{1}{9}, -2)$ 、 $(\frac{1}{3}, -1)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(3, 1)$ 、 $(9, 2)$  である。

(2) 真数条件より、 $x > 0$  である。

また、任意の実数  $y$  に対して  $x = 3^y$  が正の値として実現できるため、値域は実数全体である。

(3) 底 3 は  $3 > 1$  を満たす。

指数関数  $y = 3^x$  は厳密増加であり、その逆関数である  $y = \log_3 x$  も厳密増加である。

**練習問題 2 の解答・解説**

(1)

$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^y$$

として考える。

$y = -2, -1, 0, 1, 2$  を代入すると、 $x = 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}$  となる。

したがって代表点は、 $(9, -2)$ 、 $(3, -1)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(\frac{1}{3}, 1)$ 、 $(\frac{1}{9}, 2)$  である。

(2) 底は、 $0 < \frac{1}{3} < 1$  である。

したがって指数関数は減少し、その逆関数である  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$  も厳密減少する。

(3) 減少関数なので、左端で最大値、右端で最小値をとる。

$x = \frac{1}{9}$  のとき、次のように計算する。

$$\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

より、 $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$  である。

$x = 3$  のとき、次のように計算する。

$$3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

より、 $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$  である。

したがって最大値は 2、最小値は  $-1$  である。

### 練習問題 3 の解答・解説

---

- (1)  $3 > 1$ であるから、 $y = \log_3 x$  は厳密増加である。  
(2)  $0 < \frac{1}{3} < 1$ であるから、 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$  は厳密減少である。  
判断基準は底が 1 より大きいのか、1 より小さいかである。

### 練習問題 4 の解答・解説

---

- (1) 対数では真数が正である必要がある。  
したがって、 $x > 0$ である。  
(2) 指数表示にすると、次のように計算する。

$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^y$$

任意の実数  $y$  に対して右辺は正の値をとるため、すべての実数  $y$  が対数関数の値として現れる。  
したがって値域は実数全体である。

- (3) ある。  
例えば、 $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$ である。  
真数 3 は正であるが、対数の値は負になる。  
真数が正という条件と、対数の値の符号は別の問題である。

### 練習問題 5 の解答・解説

---

- (1) 指数関数で、 $8 = 2^3$ である。  
したがって対数関数では座標を交換した  $(8, 3)$  に対応する。  
(2) 直線  $y = x$  に関して対称である。  
(3) 指数関数上の点  $(u, v)$  は、 $v = 2^u$  を満たす。  
これを対数表示すると、 $u = \log_2 v$  となる。  
したがって対応する点は  $(v, u)$  であり、座標交換による反射になる。

### 練習問題 6 の解答・解説

---

- (1)  $4 = 2^2$  より、 $\log_2 4 = 2$  である。  
したがって点  $(4, 2)$  を通る。  
(2) 底の変換を考える。  
 $\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$  である。  
したがって、 $x$  は同じで  $y$  の符号が反対になる。  
点  $(4, 2)$  は、 $(4, -2)$  に対応する。  
(3) この 2 つのグラフは、 $y = 0$  すなわち  $x$  軸に関して対称である。  
これは逆関数による座標交換ではなく、底が逆数になることで出力の符号が反転するためである。

## 練習問題 7 の解答・解説

結論である「 $x = 0$  が縦の漸近線である」は正しい。

しかし、「 $x = 0$  で定義されないのだから」という理由だけでは不十分である。

定義域外の点を持つことだけでは、必ず縦の漸近線になるとは限らない。

例えば、 $y = x$  を  $x > 0$  の範囲で考える。

このとき、 $x \rightarrow 0+$  ならば、 $y \rightarrow 0$  となる。

グラフと直線  $x = 0$  との距離は 0 に近づくが、グラフは有限な点  $(0, 0)$  に近づいているだけであり、 $y$  の値が限りなく大きくなるわけではない。

したがって、 $x = 0$  はこの場合の縦の漸近線ではない。

一方、 $y = \log_2 x$  では、 $x \rightarrow 0+$  のとき、 $y \rightarrow -\infty$  となる。

つまり、グラフは直線  $x = 0$  に近づきながら、 $|y|$  が限りなく大きくなる。

したがって、 $x = 0$  は縦の漸近線である。

定義域外であることと、縦の漸近線になることは分けて判断する必要がある。

## 練習問題 8 の解答・解説

(1)

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

より、 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$  である。

また、次のように計算する。

$$1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

より、 $\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$  である。

さらに、次のように計算する。

$$4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

より、 $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$  である。

(2) 底が  $0 < \frac{1}{2} < 1$  であるため、 $x \rightarrow 0+ \Rightarrow y \rightarrow \infty$  となる。

(3) 同じ理由から、 $x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow -\infty$  となる。

(4)  $x = 0$  を含むと、次のように計算する。

$$0 = \left(\frac{1}{2}\right)^y$$

を満たす実数  $y$  が必要になる。

しかし、指数関数の値は常に正であり、次のように計算する。

$$\left(\frac{1}{2}\right)^y > 0$$

であるため、そのような  $y$  は存在しない。

したがって定義域に 0 は含まれない。