

第 130 講 極大・極小

学習目標

この講では、関数のグラフの局所的な変化に注目し、次のことができるようになることを目標とする。

- ・ 極大・極小の意味を、ある点の近くでの大小関係として説明できる。
- ・ 極値をとる位置 $x = a$ と、そのときの値である極大値・極小値 $f(a)$ を区別できる。
- ・ 導関数を利用して極値の候補を求め、増減から極大・極小を判定できる。
- ・ $f'(a) = 0$ だけでは極値と判断できないことを説明できる。

極値を見る視点

関数の変化を調べるとき、区間全体で一番大きい値や一番小さい値だけを見るとは限らない。ある場所の近くだけを見ると、山の頂上のように周囲より高くなる点や、谷底のように周囲より低くなる点がある。このような局所的な変化を表す考え方が極大・極小である。

極大・極小では、「全体の中で一番かどうか」ではなく、「その点の近くで周り比べてどうか」を見ることが重要である。

例えば、山がいくつもあるグラフでは、低い山でもその周辺だけを見ると一番高い場所になる。このような場所も極大を与える。

極値を調べるときは、次の順序で考える。

1. 変化の向きが変わる場所を探す。
2. その場所の左右で関数が増えているか減っているかを見る。
3. 変化の向きから極大・極小を判断する。

極大・極小の定義

関数 $y = f(x)$ の定義域の内部にある点 $x = a$ を考える。

a の両側の十分近い範囲にあるすべての $x \neq a$ に対して $f(x) < f(a)$ が成り立つとき、 $f(a)$ を極大値、 $x = a$ を極大値をとる点という。

また、 a の両側の十分近い範囲にあるすべての $x \neq a$ に対して $f(x) > f(a)$ が成り立つとき、 $f(a)$ を極小値、 $x = a$ を極小値をとる点という。

ここで、 a は極値をとる「位置」であり、 $f(a)$ はその位置での「値」である。例えば、 $x = 2$ で極大値 5 をとる場合、位置は $x = 2$ 、極大値は 5 である。

この定義は定義域の内部の点について考えるものであり、端点では左右両側を比較できないため、この形の定義で極大・極小を判定しない。

最大値・最小値との違い

極大・極小は、関数全体での最大値・最小値とは異なる。

極大値は、その点の近くでは最大になる値であり、定義域全体で最大とは限らない。同様に、極小値も定義域全体で最小とは限らない。

閉区間で最大値・最小値を求める場合には、内部の候補点だけでなく端点も比較する必要がある。この考え方は次の講で扱う。

微分と極値の関係

関数が微分可能な内部の点 $x = a$ で極大をとるとする。

十分小さい $h \neq 0$ に対して、 $f(a+h) - f(a) < 0$ である。

$h > 0$ のとき、次のように計算する。

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} < 0$$

一方、 $h < 0$ のときは分母が負になるため、次のように計算する。

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0$$

しかし、微分可能であるため、 h を 0 へ近づけたときの差分商は左右で同じ有限な極限をもつ。その極限は、負側から近づく値と正側から近づく値の両方に対応するため、0以下かつ0以上でなければならない。

したがって、 $f'(a) = 0$ となる。

極小の場合も、大小関係の向きが逆になるだけで同様に $f'(a) = 0$ が成り立つ。

ただし、 $f'(a) = 0$ は極値をとるための必要条件であり、十分条件ではない。導関数が 0 になる点は候補であり、候補をすべて求めた後、左右の符号変化を確認し、最後に関数値を求める必要がある。多項式では、例えばある候補の左右で $f'(x)$ の符号がともに正なら、両側で関数は増加しており、極値にはならない。同様に左右とも負なら、両側で減少しているため極値にはならない。

増減と極値の対応

多項式関数について、点 $x = a$ の十分近い左側の区間と右側の区間で、導関数の符号が一定である場合を考える。

左側で $f'(x) > 0$ 、右側で $f'(x) < 0$ のとき、関数は増加してから減少するため、 $x = a$ で極大となる。

左側で $f'(x) < 0$ 、右側で $f'(x) > 0$ のとき、関数は減少してから増加するため、 $x = a$ で極小となる。

一方、左側・右側ともに $f'(x) > 0$ の場合は増加が続き、左側・右側ともに $f'(x) < 0$ の場合は減少が続き、極値ではない。

したがって、符号変化を確認することが極値判定の中心になる。

なお、定数多項式では関数値が常に一定であり、この講で扱う「周囲より大きい・小さい」という厳密な定義では極値を持たない。導関数が恒等的に 0 になる場合も、通常の符号変化による判定とは別に考える必要がある。

例題 1

関数 $f(x) = x^3 - 3x$ の極大・極小を調べなさい。

例題 1 の解答・解説

導関数を求める。

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

因数分解すると、 $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ となる。

したがって、極値の候補は $x = -1, 1$ である。

$f'(x)$ の符号を調べると、 $x = -1$ の前後では正から負へ変化し、 $x = 1$ の前後では負から正へ変化する。

したがって、 $x = -1$ では極大、 $x = 1$ では極小である。

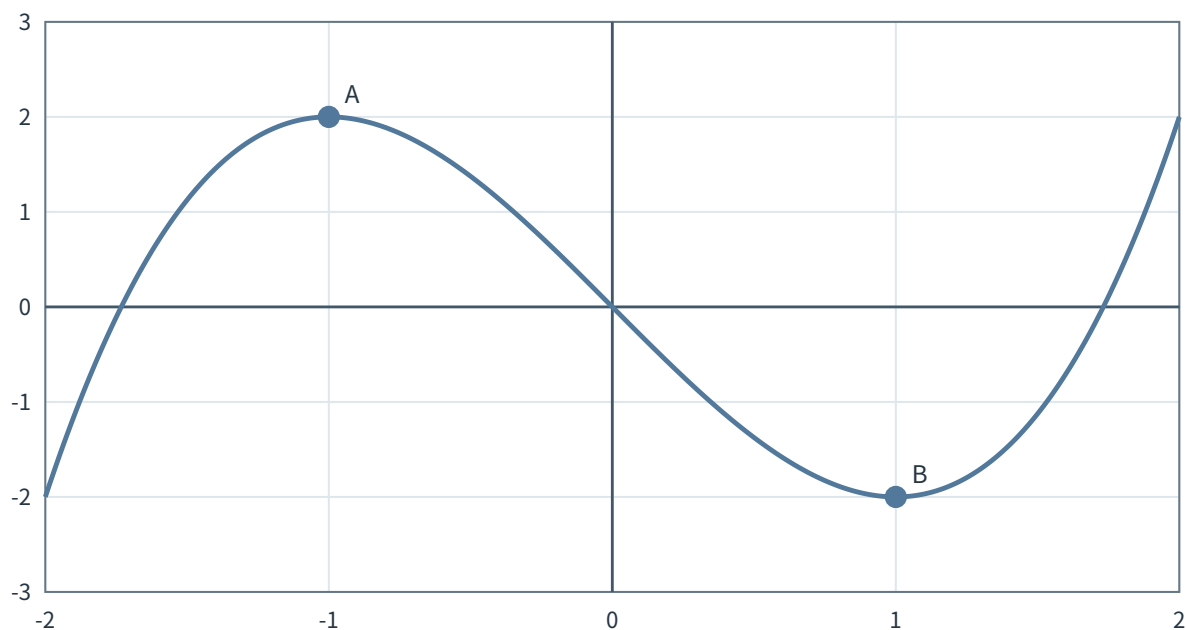


図 1 $y = x^3 - 3x$ 。極大となる点は $A(-1, 2)$ 、極小となる点は $B(1, -2)$ 。

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

図 2 $f'(x) = 3x^2 - 3$ の符号と増減。 $x = -1$ で正から負、 $x = 1$ で負から正に変わる。

関数値を求める。

$$\begin{aligned}
 f(-1) &= (-1)^3 - 3(-1) \\
 &= 2 \\
 f(1) &= 1^3 - 3(1) \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

よって、 $x = -1$ で極大値 2、 $x = 1$ で極小値 -2 をとる。

例題 2

関数 $f(x) = x^4 - 2x^2$ の極大・極小を調べなさい。

例題 2 の解答・解説

導関数を求める。

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

因数分解すると、 $f'(x) = 4x(x - 1)(x + 1)$ となる。

- したがって候補は $x = -1, 0, 1$ である。
 $f'(x)$ の符号を確認すると、符号は次のように変化する。
- $x = -1$ の前後では負から正へ変化する。
 - $x = 0$ の前後では正から負へ変化する。
 - $x = 1$ の前後では負から正へ変化する。

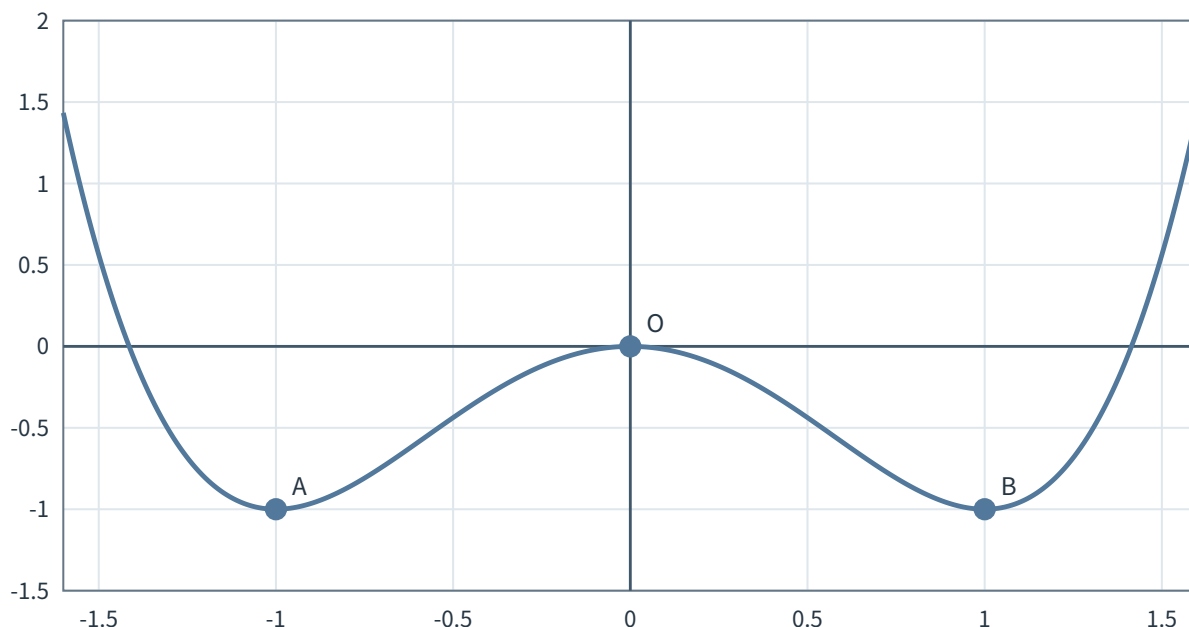


図3 $y = x^4 - 2x^2$ 。極小となる点は $A(-1, -1)$ と $B(1, -1)$ 、極大となる点は $O(0, 0)$ 。

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗

図4 $f'(x) = 4x^3 - 4x$ の符号と増減。 $x = -1, 1$ で負から正、 $x = 0$ で正から負に変わる。

したがって、 $x = -1$ と $x = 1$ では極小、 $x = 0$ では極大となる。
 関数値を求める。

$$f(-1) = 1 - 2 = -1$$

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 1 - 2 = -1$$

よって、 $x = \pm 1$ で極小値 -1 、 $x = 0$ で極大値 0 をとる。

例題 3

関数 $f(x) = x^3$ について、 $x = 0$ が極値をとるか調べなさい。

例題 3 の解答・解説

導関数を求める。
 $f'(x) = 3x^2$
したがって、 $f'(0) = 0$ であり、 $x = 0$ は極値の候補になる。
しかし、 $x = 0$ の左右を調べる。
 $x < 0$ のときも $x > 0$ のときも、 $3x^2 > 0$ であるため、関数は左から右へ常に増加している。
増加から減少、または減少から増加への変化がないため、 $x = 0$ では極大にも極小にもならない。

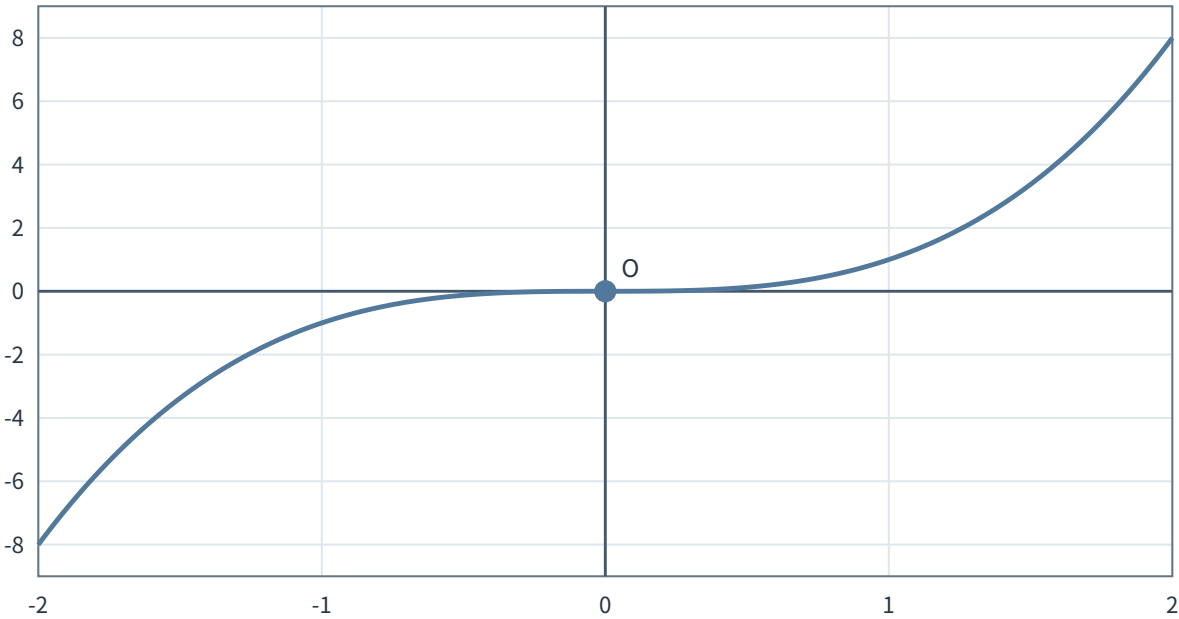


図 5 $y = x^3$ 。点 $O(0, 0)$ で導関数は 0 になるが、前後とも増加するため極値をとらない。

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	0	↗

図 6 $f'(x) = 3x^2$ は $x = 0$ のときだけ 0。左右の符号はともに正で、増減は変わらない。

実際に、原点の近くでは負の値から正の値へ変化するだけであり、原点が周囲より高い点や低い点にはなっていない。
したがって、 $f'(0) = 0$ であっても、極値をとるとは限らない。

練習問題 1

関数 $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ の極大・極小を調べなさい。

練習問題 2

関数 $f(x) = (x+1)^2 - 4$ の極大・極小を調べなさい。

練習問題 3

関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ の極大・極小を調べなさい。

練習問題 4

関数 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 5$ の極大・極小を調べなさい。

練習問題 5

関数 $f(x) = (x-1)^3 + 2$ について、 $x = 1$ が極値をとるか調べなさい。

練習問題 6

関数 $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ の極大・極小を調べなさい。

練習問題 7

「多項式関数 $f(x)$ で $f'(a) = 0$ ならば、 $x = a$ は必ず極大または極小をとる」という考えが正しいか答えなさい。誤りである場合は反例を挙げ、理由を説明しなさい。

練習問題 8

関数 $f(x) = x^3 - 6x$ は、 $x = -\sqrt{2}$ と $x = \sqrt{2}$ で極値をとる。極値をとる位置と極値の値を区別して答えなさい。

練習問題 1 の解答・解説

導関数を求める。

$$f'(x) = -2x + 4$$

極値の候補は、 $-2x + 4 = 0$ より、 $x = 2$ である。

導関数の符号を見る。

$x < 2$ では $f'(x) > 0$ 、 $x > 2$ では $f'(x) < 0$ である。

したがって、関数は増加から減少へ変化するため、 $x = 2$ で極大となる。

関数値を求める。

$$f(2) = -4 + 8 - 1 = 3$$

よって、 $x = 2$ で極大値 3 をとる。極小値はない。

練習問題 2 の解答・解説

展開すると、 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ となる。

導関数を求める。

$$f'(x) = 2x + 2$$

極値の候補は、 $2x + 2 = 0$ より、 $x = -1$ である。

符号を確認する。

$x < -1$ では $f'(x) < 0$ であり、 $-1 < x$ では $f'(x) > 0$ である。

したがって、関数は減少から増加へ変化するため、 $x = -1$ で極小となる。

関数値を求める。

$$f(-1) = 0 - 4 = -4$$

よって、 $x = -1$ で極小値 -4 をとる。極大値はない。

練習問題 3 の解答・解説

導関数を求める。

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

因数分解すると、 $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$ となる。

極値の候補は、 $x = 1, 3$ である。

区間ごとの符号を見る。

$x < 1$ では、 $(x - 1) < 0$, $(x - 3) < 0$ より $f'(x) > 0$ 。

$1 < x < 3$ では、 $(x - 1) > 0$, $(x - 3) < 0$ より $f'(x) < 0$ 。

$x > 3$ では、 $(x - 1) > 0$, $(x - 3) > 0$ より $f'(x) > 0$ 。

したがって、 $x = 1$ では正から負へ変化するので極大、 $x = 3$ では負から正へ変化するので極小である。

関数値を求める。

$$f(1) = 1 - 6 + 9$$

$$= 4$$

$$f(3) = 27 - 54 + 27$$

$$= 0$$

よって、 $x = 1$ で極大値 4 、 $x = 3$ で極小値 0 をとる。

練習問題 4 の解答・解説

導関数を求める。

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$$

因数分解すると、 $f'(x) = -3(x-3)(x+1)$ となる。

候補は、 $x = -1, 3$ である。

符号を確認する。

$x < -1$ では $(x-3)$ と $(x+1)$ はともに負であり、積は正になる。先頭の -3 により、 $f'(x) < 0$ となる。

$-1 < x < 3$ では積が負になり、 $f'(x) > 0$ となる。

$x > 3$ では積が正になり、 $f'(x) < 0$ となる。

したがって、 $x = -1$ では負から正へ変化するため極小、 $x = 3$ では正から負へ変化するため極大である。

関数値を求める。

$$f(-1) = 1 + 3 - 9 - 5 = -10$$

$$f(3) = -27 + 27 + 27 - 5 = 22$$

よって、 $x = -1$ で極小値 -10 、 $x = 3$ で極大値 22 をとる。

練習問題 5 の解答・解説

展開すると、 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ となる。

導関数を求める。

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

因数分解すると、 $f'(x) = 3(x-1)^2$ である。

したがって候補は、 $x = 1$ である。

しかし、 $x \neq 1$ では $3(x-1)^2 > 0$ であるため、左右の十分近い区間で導関数はともに正である。

よって、関数は左側でも右側でも増加しており、増加から減少、または減少から増加への変化はない。

また、 h を 0 に近い非零の値とすると、 $f(1+h) = h^3 + 2$ となる。

$h > 0$ では $f(1+h) > 2$ 、 $h < 0$ では $f(1+h) < 2$ となるため、 $f(1) = 2$ は周囲より大きくも小さくもない。

したがって、 $x = 1$ では極大値も極小値もとらない。

練習問題 6 の解答・解説

導関数を求める。

$$f'(x) = 4x^3 - 8x$$

因数分解すると、 $f'(x) = 4x(x^2 - 2)$

さらに、 $f'(x) = 4x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ となる。

極値の候補は、 $x = -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$ である。

各区間で因数の符号を調べる。

$x < -\sqrt{2}$ では、3つの因数の符号より $f'(x) < 0$ 。

$-\sqrt{2} < x < 0$ では $f'(x) > 0$ 。

$0 < x < \sqrt{2}$ では $f'(x) < 0$ 。

$x > \sqrt{2}$ では $f'(x) > 0$ 。

したがって、

- $x = -\sqrt{2}$ は負から正へ変化するため極小。
- $x = 0$ は正から負へ変化するため極大。
- $x = \sqrt{2}$ は負から正へ変化するため極小。

関数値を求める。

$$\begin{aligned} f(-\sqrt{2}) &= (\sqrt{2})^4 - 4(\sqrt{2})^2 + 3 \\ &= 4 - 8 + 3 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$f(0) = 3$$

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}) &= (\sqrt{2})^4 - 4(\sqrt{2})^2 + 3 \\ &= 4 - 8 + 3 \\ &= -1 \end{aligned}$$

よって、 $x = \pm\sqrt{2}$ で極小値 -1 、 $x = 0$ で極大値 3 をとる。

練習問題 7 の解答・解説

$f'(x) = 0$ となる点は、極値を調べる候補である。

しかし、候補になることと、実際に極値をとることは同じではない。

例えば、 $f(x) = x^3$ では、 $f'(x) = 3x^2$ であり、 $f'(0) = 0$ となる。

しかし、 $x < 0$ でも $x > 0$ でも $f'(x) > 0$ であり、関数は常に増加している。

したがって、増加から減少、減少から増加への変化がなく、極値ではない。

よって、 $f'(a) = 0$ は極値をとるための必要条件であり、十分条件ではない。

練習問題 8 の解答・解説

導関数を求める。

$$f'(x) = 3x^2 - 6$$

因数分解すると、 $f'(x) = 3(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ である。

候補は、 $x = -\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{2}$ である。

$x < -\sqrt{2}$ では $f'(x) > 0$ 。

$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ では $f'(x) < 0$ 。

$x > \sqrt{2}$ では $f'(x) > 0$ 。

したがって、 $x = -\sqrt{2}$ では極大、 $x = \sqrt{2}$ では極小である。

関数値を求める。

$$\begin{aligned} f(-\sqrt{2}) &= (-\sqrt{2})^3 - 6(-\sqrt{2}) \\ &= -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}) &= (\sqrt{2})^3 - 6\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \\ &= -4\sqrt{2} \end{aligned}$$

よって、極大をとる位置は $x = -\sqrt{2}$ 、極大値は $4\sqrt{2}$ である。

また、極小をとる位置は $x = \sqrt{2}$ 、極小値は $-4\sqrt{2}$ である。

位置と値を混同しないことが重要である。