第 202 講 不定積分の基本

学習目標

この講では、微分の逆の操作として不定積分を理解し、基本的な関数の不定積分を求められるようになることを目標とする。
具体的には、次のことができるようになる。
- 原始関数と不定積分の違いを説明できる。
- 微分すると元の関数になる関数を考え、不定積分を求められる。
- 積分定数 C の意味を理解し、忘れずに付けられる。
- 微分による検算で積分結果を確認できる。
- べき関数の積分公式を使い、例外となる場合を正しく扱える。

微分の逆の操作として考える

微分は、関数の変化の様子を調べる操作である。
例えば、x^2 を微分すると $2x$ になる。
逆に、$2x$ を見たときに「微分すると $2x$ になる関数は何か」と考える操作が不定積分である。
ただし、微分すると同じ結果になる関数は 1 つとは限らない。
例えば、x^2、x^2+1、x^2-5 はすべて微分すると $2x$ になる。
そのため、不定積分では 1 つの関数ではなく、同じ微分結果をもつ関数の集まりを考える。

原始関数と不定積分

1 つの開区間上で定義された関数 $f(x)$ に対して、微分すると $f(x)$ になる関数を $f(x)$ の原始関数という。
$F'(x)=f(x)$ を満たす $F(x)$ が原始関数である。
原始関数をすべてまとめたものを不定積分といい、次のように表す。

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

ここで、$f(x)$ は被積分関数、$\int$ は積分を表す記号、dx は変数 x に関する積分を表す。C は任意の実定数であり、原始関数の違いを表す積分定数である。

原始関数どうしの差が定数になる理由

同じ区間で 2 つの原始関数 $F(x)$ と $G(x)$ を考える。
どちらも微分すると同じ関数になるため、$F'(x)=G'(x)$ である。
したがって、差の関数 $F(x)-G(x)$ を微分すると 0 になる。
微分して常に 0 になる関数は定数なので、同じ区間では原始関数どうしの差は定数になる。
つまり、不定積分の C は「どの原始関数を選ぶか」を表す量である。

©ミライコーチング

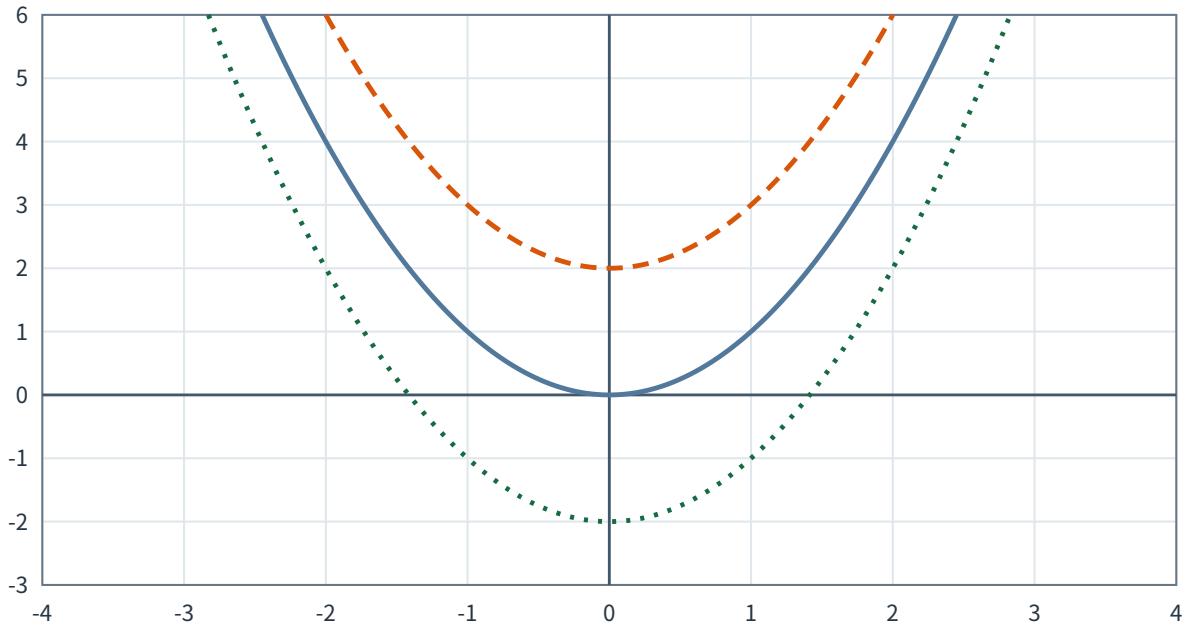

図 1　原始関数は上下移動した同じ形のグラフになる

図から見る積分定数の意味

図の実線は $y = x^2$、破線は $y = x^2 + 2$、点線は $y = x^2 - 2$ を表し、それぞれ同じ形のグラフが上下に移動したものである。
そのため、どのグラフを微分しても同じ $2x$ になる。
積分定数 C は、この上下方向の位置の違いを表している。

不定積分の基本公式

基本公式は、微分すると元の関数になる形を逆向きに利用して得られる。
$n \neq -1$ のべき関数には次の公式を用いる。

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

実数 n では $x > 0$ の範囲で考える。
0 を含まない 1 つの開区間では、逆数の不定積分は次のようになる。

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln| \, x \, | + C$$

指数関数では、次の公式を用いる。

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

三角関数では、次の公式を用いる。

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

整数 $n \geq 0$ の場合は実数全域でべき関数の積分公式を利用できる。また、負の整数の場合は $n = -1$ の例外を除き、0 を含まない開区間でべき関数の積分公式が成立する。三角関数の角はラジアンで扱う。

べき関数の積分と例外

べき関数では、指数を 1 増やした形を微分すると元の係数が現れるため、その係数を打ち消すように割る。
$n \neq -1$ の場合、べきの不定積分は次の式で求められる。

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

実際に右辺を微分すると、係数 $n+1$ が約分されて x^n に戻る。
ただし、$n = -1$ では分母が 0 になるため、この公式は使えない。
指数が -1 の場合は次の公式を用いる。

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln| \, x \, | + C$$

$x > 0$ では、$\ln x$ の導関数は $\frac{1}{x}$ である。
$x < 0$ では、$\ln(-x)$ の導関数は $\frac{1}{x}$ である。
したがって、$\frac{1}{x}$ の原始関数は 0 を含まない開区間ごとに考える必要がある。

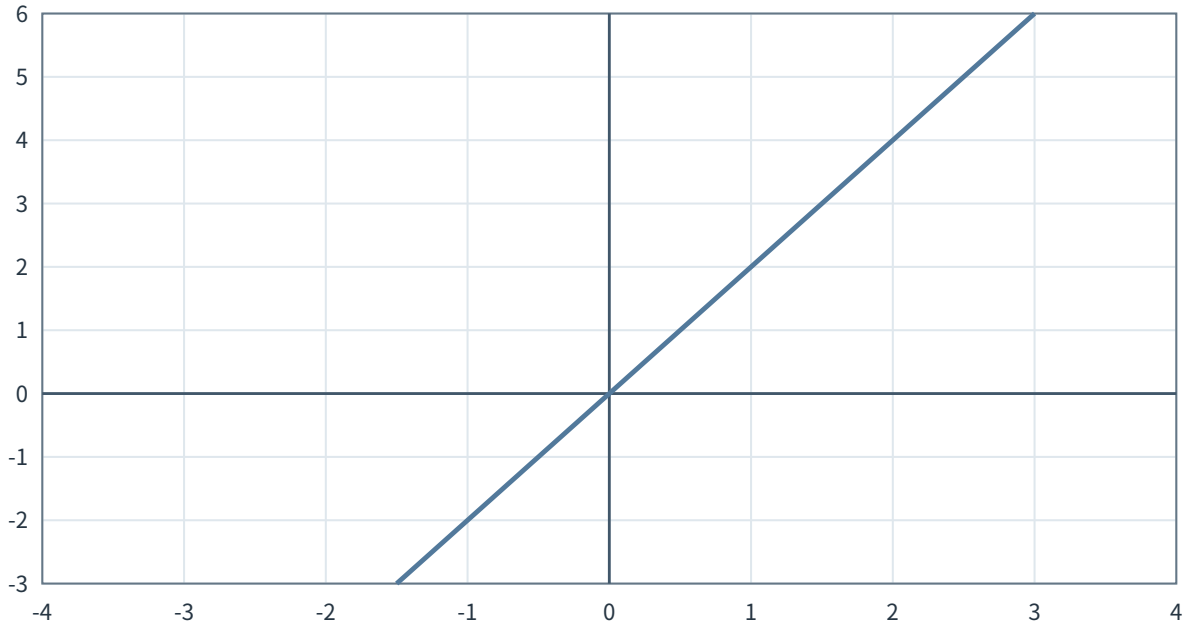

図 2　原始関数の微分で共通する導関数 $y = 2x$

微分による検算

不定積分の結果は、微分して元の関数に戻るかを確認することで検算できる。
ただし、微分すると積分定数 C は 0 になるため、微分検算だけでは C の付け忘れを見抜けない。
そのため、微分による正しさの確認と、すべての原始関数を表すために積分定数 C を付けることは別々に確認する必要がある。

初期条件によって 1 本の原始関数が決まる

不定積分では、積分定数 C によって多くの原始関数が存在する。
しかし、通る点などの条件が加わると、その条件を満たす 1 本に決まる。
例えば、$F(x) = x^2 + C$ が点 $(1, 3)$ を通るなら、$3 = 1 + C$ から $C = 2$ になる。
図の実線 $y = x^2 + 2$ は点 $A(1, 3)$ を通る一方、破線 $y = x^2$ は点 A を通らないため、初期条件によって選ばれる原始関数が変化する。

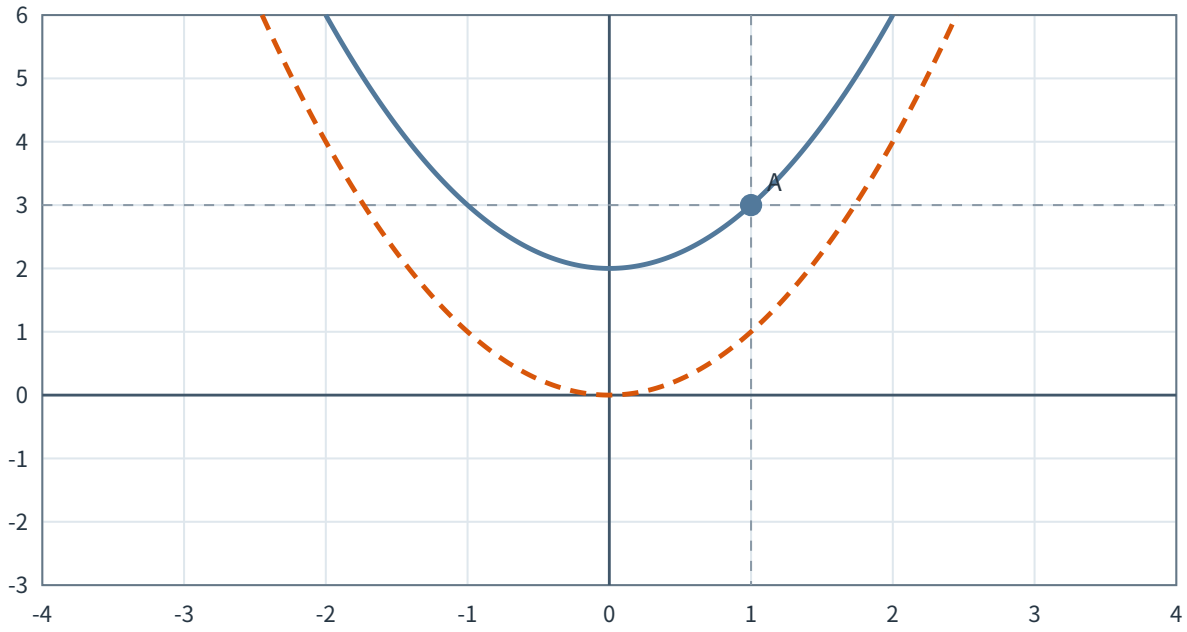

図 3　初期条件で積分定数が決まり 1 本に定まる

線形性

不定積分の線形性は、微分の線形性から理解できる。
同じ開区間で $F'(x) = f(x)$、$G'(x) = g(x)$ とし、a, b を実定数とする。

$$(aF(x) + bG(x))' = aF'(x) + bG'(x) = af(x) + bg(x)$$

したがって、$af(x) + bg(x)$ の原始関数は $aF(x) + bG(x)$ であり、すべての原始関数を表すときは最後に積分定数 C を加える。

指数関数・三角関数の基本積分

指数関数と三角関数では、微分すると元に戻る関係を利用する。
e^x は微分しても e^x のままであるため、$\int e^x \, dx = e^x + C$ である。
また、$\sin x$ と $\cos x$ は互いに微分によって移り変わるため、$\int \cos x \, dx = \sin x + C$、$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ となる。

例題 1

x^2 の不定積分を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

べき関数の公式を利用して積分する。

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

微分すると、$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$ となるため、元の関数に戻る。

例題 2

$x \neq 0$ の 1 つの区間で、$\frac{1}{x}$ の原始関数を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

$\frac{1}{x}$ はべき関数の公式で指数 $n = -1$ に対応するが、この場合は公式を使えない。
そのため、例外となる公式を利用する。

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|\,x\,| + C$$

微分すると $(\ln|\,x\,| + C)' = \frac{1}{x}$ となる。
ただし、$x = 0$ では定義できないため、$x > 0$ や $x < 0$ など、0 を含まない 1 つの区間ごとに積分定数 C を考える。

例題 3

次の不定積分を求めなさい。

$$\int (2x + \cos x)\,dx$$

例題 3 の解答・解説

線形性を利用して、それぞれの関数の原始関数を考える。
$2x$ の原始関数は x^2、$\cos x$ の原始関数は $\sin x$ である。
計算すると、次の式を得る。

$$\int (2x + \cos x)\,dx = x^2 + \sin x + C$$

微分すると $(x^2 + \sin x + C)' = 2x + \cos x$ となり、元の関数に戻る。

演習問題

演習問題 1

次の不定積分を求めなさい。

$$\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx$$

©ミライコーチング

演習問題 2

$x > 0$ の範囲で、次の不定積分を求めなさい。

$$\int \sqrt{x}\, dx$$

演習問題 3

0 を含まない 1 つの開区間で、次の不定積分を求めよ。

$$\int \frac{2}{x^2}\, dx$$

演習問題 4

次の不定積分を求めなさい。

$$\int (e^x + \cos x - \sin x)\, dx$$

演習問題 5

次の関数のすべての原始関数を求めなさい。

$$f(x) = 4x^3 - 2x$$

演習問題 6

関数 $F(x)$ が $F'(x) = 2x$ を満たし、点 $(1, 4)$ を通るとき、$F(x)$ を求めなさい。

演習問題 7

関数 $\frac{1}{x}$ の原始関数について考える。
$x > 0$ の区間と $x < 0$ の区間では、それぞれ積分定数を用いて別々に表す必要がある理由を説明しなさい。

演習問題 8

次の式で定義される関数 $G(x)$ を微分し、$G(x)$ がどの関数の原始関数か答えよ。ただし、C は実定数である。

$$G(x) = \frac{x^4}{2} - 3x^2 + \sin x + C$$

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

積分の線形性を利用して、それぞれの項を分けて考える。

$$\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx = \int 3x^2\,dx - \int 4x\,dx + \int 5\,dx$$

各項の不定積分は次のようになる。

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C_1$$

$$\int 4x\,dx = 2x^2 + C_2$$

$$\int 5\,dx = 5x + C_3$$

定数 $C_1 - C_2 + C_3$ を 1 つの積分定数 C にまとめると、次の式を得る。

$$\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx = x^3 - 2x^2 + 5x + C$$

微分すると $3x^2 - 4x + 5$ に戻るため、正しい。

演習問題 2 の解答・解説

平方根をべきで表すと $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ になる。
平方根は $x = 0$ でも定義できるが、微分公式と区間の扱いをそろえるため、この問題では $x > 0$ の範囲で考える。

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

微分すると $x^{\frac{1}{2}}$ に戻るため、正しい原始関数である。

演習問題 3 の解答・解説

被積分関数をべきで表す。

$$\frac{2}{x^2} = 2x^{-2}$$

計算すると、次の式を得る。

$$\int 2x^{-2}\,dx = 2 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

計算すると、次の式を得る。

$$\int \frac{2}{x^2}\,dx = -\frac{2}{x} + C$$

$x = 0$ では定義できないため、0 を含まない 1 つの区間ごとに積分定数 C を考える。

演習問題 4 の解答・解説

線形性を利用して、それぞれの関数の原始関数を考える。
e^x の原始関数は e^x、$\cos x$ の原始関数は $\sin x$、$-\sin x$ の原始関数は $\cos x$ である。
計算すると、次の式を得る。

$$\int (e^x + \cos x - \sin x)\,dx = e^x + \sin x + \cos x + C$$

微分すると $e^x + \cos x - \sin x$ に戻るため、正しい。

演習問題 5 の解答・解説

すべての原始関数を求めるため、積分定数を最後に含める。

$$\int (4x^3 - 2x)\,dx = \int 4x^3\,dx - \int 2x\,dx$$

それぞれの原始関数を考える。
$4x^3$ の原始関数は x^4、$-2x$ の原始関数は $-x^2$ である。
計算すると、次の式を得る。

$$F(x) = x^4 - x^2 + C$$

C を変化させることで、すべての原始関数を表している。

演習問題 6 の解答・解説

$F'(x) = 2x$ なので、$2x$ の原始関数を求めると $F(x) = x^2 + C$ となる。
点 $(1, 4)$ を通る条件から $4 = 1 + C$ であり、$C = 3$ を得る。
したがって、条件を満たす関数は $F(x) = x^2 + 3$ である。

演習問題 7 の解答・解説

$\frac{1}{x}$ は $x = 0$ で定義されないため、定義域全体は 1 つの開区間ではなく、$x > 0$ と $x < 0$ などの複数の区間に分かれる。
各区間ではそれぞれ独立に積分定数を選べるため、区間ごとの定数がたまたま同じ値になっても問題はない。

演習問題 8 の解答・解説

与えられた関数を微分する。

$$G'(x) = 2x^3 - 6x + \cos x$$

したがって、$G(x)$ は $2x^3 - 6x + \cos x$ の原始関数である。
また、積分定数 C は微分すると 0 になるため、微分結果には影響しない。

©ミライコーチング