

GOAL この講でできるようになること

- ・式の一部分をひとまとまりとして見られる。
- ・乗法公式が使える形を見つけられる。
- ・文字や式が複雑でも、同じ形の乗法公式を使って展開できる。
- ・必要に応じて一部分を別の文字に置き換えて考えられる。
- ・展開方法を選ぶ前に、式全体の形を確認できる。

EXPLANATION / 解説 公式で大切なのは文字ではなく形
前の講では、

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

などの乗法公式を学びました。
ここで大切なのは、公式に書かれている a や b そのものではありません。
例えば、 $(2x + 3y)^2$ では、 $a = 2x$ 、 $b = 3y$ と見れば、

$$(a + b)^2$$

と同じ形です。
したがって、

$$\begin{aligned}(2x + 3y)^2 &= (2x)^2 + 2 \cdot (2x)(3y) + (3y)^2 \\ &= 4x^2 + 12xy + 9y^2\end{aligned}$$

と展開できます。
公式を使うときは、文字の名前ではなく、式がどの形になっているかを見るのが重要です。

POINT ひとまとまりを1つのものとして見る
 $(x + 1)^2$ だけでなく、

$$(x + y)^2$$

や

$$(2a - 3b)^2$$

にも同じ公式が使えます。
さらに、

$$(x + 1 + 3)^2$$

のような式でも、 $x + 1$ をひとまとまりとして見ることができます。
複雑に見える式ほど、「どこを1つのまとまりとして見れば、知っている形になるか」を考えます。

EXPLANATION / 解説 置き換えると形が見える

$(x + 1 + 2)(x + 1 - 2)$ を考えます。
そのまま展開することもできますが、 $x + 1$ が2回現れていることに注目します。
 $x + 1 = A$ と置くと、

$$(x + 1 + 2)(x + 1 - 2) = (A + 2)(A - 2)$$

となります。
これは、

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

の形です。
したがって、

$$\begin{aligned}(A + 2)(A - 2) &= A^2 - 4 \\ &= (x + 1)^2 - 4 \\ &= x^2 + 2x + 1 - 4 \\ &= x^2 + 2x - 3\end{aligned}$$

となります。
置き換えは答えを変えるための操作ではありません。同じ部分に短い名前を付けて、式の形を見やすくする方法です。

EXPLANATION / 解説 全部をばらす前に左右を比べる

$(3x + 2y)(3x - 2y)$ を見たとき、すぐに4回の掛け算を始める必要はありません。
2つの括弧を比べると、 $3x$ は同じで、もう一方が $+2y$ と $-2y$ になっています。
つまり、

$$(a + b)(a - b)$$

の形です。
そこで、

$$(3x + 2y)(3x - 2y) = (3x)^2 - (2y)^2 \\ = 9x^2 - 4y^2$$

と計算できます。
計算する前に左右の括弧を比べると、使える公式を見つけやすくなります。

CAUTION / 注意 似ているだけでは公式を使えない
 $(x + 2)(x + 3)$ は、 $(a + b)(a - b)$ の形ではありません。
+2 と +3 は符号が反対になっているわけではないからです。
この場合は、

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

を使います。
式の一部分が似ているだけで公式を決めず、**括弧全体の形が公式と一致しているか**を確認します。

EXPLANATION / 解説 同じまとまりが2回あれば平方を疑う
 $(2x + y + 3)^2$ のような式では、括弧の中に3つの項があります。
ここで、 $2x + y$ をひとまとまりとして見ると、

$$((2x + y) + 3)^2$$

となります。
 $A = 2x + y$ と置けば、

$$(A + 3)^2 = A^2 + 6A + 9$$

です。
元に戻すと、

$$(2x + y)^2 + 6(2x + y) + 9$$

となり、さらに展開して、

$$(2x + y + 3)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2 + 12x + 6y + 9$$

となります。
このように、複雑な式を一度に全部展開するのではなく、**まとまりを保ちながら段階的に展開**するとミスを減らせます。

POINT 展開する前の判断
式を見たら、次の順に確認します。
1. 同じまとまりが繰り返されていないかを見る。
2. 平方の形か、和と差の積の形かを確認する。
3. 必要なら、まとまりを A などと置く。
4. 乗法公式を使う。
5. 最後に残った括弧を展開し、同類項をまとめる。
公式を使う速さより、**使える形を正しく見抜くこと**の方が大切です。

例題 1 EXERCISE

次の式を展開しなさい。
 $(3x + 2y)^2$

ANSWER / 解答 例題1の解答・解説

$(a + b)^2$ の形です。
 $a = 3x$ 、 $b = 2y$ と見ます。

$$(3x + 2y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x)(2y) + (2y)^2 \\ = 9x^2 + 12xy + 4y^2$$

したがって、展開すると $9x^2 + 12xy + 4y^2$ です。
 $3x$ と $2y$ をそれぞれ1つのまとまりとして公式へ当てはめます。

例題 2 EXERCISE

次の式を展開しなさい。
 $(2a + 5b)(2a - 5b)$

ANSWER / 解答 例題2の解答・解説

2つの括弧を比べると、 $2a$ は同じで、 $5b$ の符号だけが反対です。
したがって、 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ の形を使います。

$$(2a + 5b)(2a - 5b) = (2a)^2 - (5b)^2 \\ = 4a^2 - 25b^2$$

したがって、展開すると $4a^2 - 25b^2$ です。

例題 3 EXERCISE

次の式を展開しなさい。
 $(x+2+3)(x+2-3)$

ANSWER / 解答 例題 3 の解答・解説

$x+2$ が両方の括弧に共通して現れています。
 $A = x+2$ と置くと、

$$(x+2+3)(x+2-3) = (A+3)(A-3)$$

です。
和と差の積を使うと、

$$\begin{aligned}(A+3)(A-3) &= A^2 - 9 \\ &= (x+2)^2 - 9 \\ &= x^2 + 4x + 4 - 9 \\ &= x^2 + 4x - 5\end{aligned}$$

したがって、展開すると $x^2 + 4x - 5$ です。
共通して現れる $x+2$ を 1 つのまとまりとして見るのがポイントです。

例題 4 EXERCISE

次の式を展開しなさい。
 $(x+y+2)^2$

ANSWER / 解答 例題 4 の解答・解説

$x+y$ をひとまとまりとして見ます。
 $A = x+y$ と置けば、

$$(x+y+2)^2 = (A+2)^2$$

です。
平方の公式を使うと、

$$\begin{aligned}(A+2)^2 &= A^2 + 4A + 4 \\ &= (x+y)^2 + 4(x+y) + 4 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 4\end{aligned}$$

したがって、展開すると $x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 4y + 4$ です。
3 項を含む平方でも、2 つのまとまりに分けることで既習の公式を利用できます。

練習問題 1 EXERCISE

次の式を展開しなさい。

- (1) $(2x + 3y)^2$
- (2) $(4a - b)^2$
- (3) $(3x + 5y)(3x - 5y)$

練習問題 2 EXERCISE

次の式を展開しなさい。

- (1) $(x + y)(x - y)$
- (2) $(2a + 3b)(2a - 3b)$
- (3) $(5x - y)^2$

練習問題 3 EXERCISE

次の式を展開しなさい。

- (1) $(x + 1 + 4)(x + 1 - 4)$
- (2) $(x - 2 + 3)(x - 2 - 3)$
- (3) $(2x + 1 + 2)(2x + 1 - 2)$

練習問題 4 EXERCISE

次の式を展開しなさい。

- (1) $(x + y + 1)^2$
- (2) $(x + y - 2)^2$
- (3) $(2x + y + 1)^2$

練習問題 5 EXERCISE

次の式を展開しなさい。

- (1) $(x + 2y + 3)(x + 2y - 3)$
- (2) $(2a - b + 4)(2a - b - 4)$

練習問題 6 EXERCISE

次の式を展開しなさい。

$$(x + 3)^2 - (x - 3)^2$$

練習問題 7 EXERCISE

次の式を展開しなさい。

$$(2x + 1)^2 + (2x - 1)^2$$

練習問題 8 EXERCISE

ある生徒は、 $(x + 2y)(x - 2y)$ を次のように展開しました。

$$(x + 2y)(x - 2y) = x^2 - 2xy - 4y^2$$

誤りを説明し、正しく展開しなさい。

SECTION 2 演習問題の解答・解説

ANSWER / 解答 練習問題 1 の解答・解説

(1) $(a+b)^2$ の形です。

$$\begin{aligned}(2x+3y)^2 &= (2x)^2 + 2 \cdot (2x)(3y) + (3y)^2 \\ &= 4x^2 + 12xy + 9y^2\end{aligned}$$

(2) $(a-b)^2$ の形です。

$$\begin{aligned}(4a-b)^2 &= (4a)^2 - 2 \cdot (4a)b + b^2 \\ &= 16a^2 - 8ab + b^2\end{aligned}$$

(3) 同じ $3x$ に対して、 $3y$ と $-3y$ が組になっています。

$$\begin{aligned}(3x+5y)(3x-5y) &= (3x)^2 - (5y)^2 \\ &= 9x^2 - 25y^2\end{aligned}$$

文字が複数あっても、各部分を1つのまとまりとして公式へ当てはめます。

ANSWER / 解答 練習問題 2 の解答・解説

(1)

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

(2)

$$\begin{aligned}(2a+3b)(2a-3b) &= (2a)^2 - (3b)^2 \\ &= 4a^2 - 9b^2\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(5x-y)^2 &= (5x)^2 - 2 \cdot (5x)y + y^2 \\ &= 25x^2 - 10xy + y^2\end{aligned}$$

平方の形と和と差の積では答えの形が異なります。括弧が同じか、符号だけが反対かを確認してから公式を選びます。

ANSWER / 解答 練習問題 3 の解答・解説

(1) $x+1$ をひとまとまりとして見ます。

$$\begin{aligned}(x+1+4)(x+1-4) &= (x+1)^2 - 4^2 \\ &= x^2 + 2x + 1 - 16 \\ &= x^2 + 2x - 15\end{aligned}$$

(2) $x-2$ をひとまとまりとして見ます。

$$\begin{aligned}(x-2+3)(x-2-3) &= (x-2)^2 - 3^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 - 9 \\ &= x^2 - 4x - 5\end{aligned}$$

(3) $2x+1$ をひとまとまりとして見ます。

$$\begin{aligned}(2x+1+2)(2x+1-2) &= (2x+1)^2 - 2^2 \\ &= 4x^2 + 4x + 1 - 4 \\ &= 4x^2 + 4x - 3\end{aligned}$$

同じ式が2つの括弧に繰り返し現れているときは、その部分を1つのまとまりとして見ると公式を使いやすくなります。

ANSWER / 解答 練習問題 4 の解答・解説

(1) $x+y$ をひとまとまりとします。

$$\begin{aligned}(x+y+1)^2 &= (x+y)^2 + 2(x+y) + 1 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1\end{aligned}$$

(2) 同様に $x+y$ をひとまとまりとして見ます。

$$\begin{aligned}(x+y-2)^2 &= (x+y)^2 - 4(x+y) + 4 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4\end{aligned}$$

(3) $2x+y$ をひとまとまりとして見ます。

$$\begin{aligned}(2x+y+1)^2 &= (2x+y)^2 + 2(2x+y) + 1 \\ &= 4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y + 1\end{aligned}$$

3項を含む括弧でも、一部分をまとめることで2項の平方として処理できます。

(1) $x + 2y$ が共通しています。

$$\begin{aligned}(x + 2y + 3)(x + 2y - 3) &= (x + 2y)^2 - 3^2 \\ &= x^2 + 4xy + 4y^2 - 9\end{aligned}$$

(2) $2a - b$ が共通しています。

$$\begin{aligned}(2a - b + 4)(2a - b - 4) &= (2a - b)^2 - 4^2 \\ &= 4a^2 - 4ab + b^2 - 16\end{aligned}$$

式が長くても、左右の括弧で共通している部分を探すと構造が見えやすくなります。

それぞれ平方の公式を使います。

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 - (x - 3)^2 &= (x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 6x + 9) \\ &= x^2 + 6x + 9 - x^2 + 6x - 9 \\ &= 12x\end{aligned}$$

したがって、展開して整理すると $12x$ です。
2つの平方を展開すると、 x^2 と定数項が打ち消し合うことが分かります。

2つの平方をそれぞれ展開します。

$$\begin{aligned}(2x + 1)^2 + (2x - 1)^2 &= (4x^2 + 4x + 1) + (4x^2 - 4x + 1) \\ &= 8x^2 + 2\end{aligned}$$

したがって、展開して整理すると $8x^2 + 2$ です。
今回は $+4x$ と $-4x$ が打ち消し合います。展開後に同類項をまとめるところが計算です。

$(x + 2y)(x - 2y)$ は、同じ x に対して $+2y$ と $-2y$ が組になっています。
したがって、和と差の積の公式を使えます。

$$\begin{aligned}(x + 2y)(x - 2y) &= x^2 - (2y)^2 \\ &= x^2 - 4y^2\end{aligned}$$

したがって、正しい展開は $x^2 - 4y^2$ です。
誤った式にある $-2xy$ の項は現れません。分配法則で確認すると、 $-2xy$ と $+2xy$ が打ち消し合うからです。
公式を使うときも、なぜ真ん中の項が消えるのかを分配法則まで戻って確認できます。