

第 142 講 等比数列の和

学習目標

等比数列の初めの n 項の有限和 S_n の意味を理解し、和を求める公式を導けるようになる。
公比 r が 1 の場合と、それ以外の場合を区別し、条件に応じて正しく公式を使えるようになる。
公式を使うだけでなく、有限項を直接足した結果と比較して計算の正しさを確認できるようになる。

等比数列の和を考える理由

等比数列では、項どうしの比が一定であるため、隣り合う項の関係を利用して有限和を整理できる。
初めの n 項を足した有限和を S_n と呼ぶ。これは第 n 項 a_n そのものとは異なり、複数の項を加えた値である。

等比数列の有限和

初項 a 、公比 r の等比数列を考える。ただし、本講では $a \neq 0$ 、 $r \neq 0$ の実数範囲で扱い、番号や項数は正整数とする。

141 講で学んだように、第 k 項は $a_k = ar^{k-1}$

で表される。ここで k は 1 から n までの整数である。

等比数列の最初の n 個の項を加えた有限和を S_n と定める。

$n = 1$ のときは最初の 1 項だけなので、 $S_1 = a$ である。

$n = 2$ のときは最初の 2 項を加えるため、 $S_2 = a + ar$ である。

このように、 S_n は第 n 項 a_n そのものではなく、最初から n 個の項を加えた値である。項番号が小さい場合でも、同じ項を重複して数えないようにする。

公式が生まれる仕組み

有限和 S_n では、第 k 項 ar^{k-1} が $k = 1$ から n まで現れるため、指数は 0 から $n - 1$ までの n 個になる。

S_n に公比 r を掛けた rS_n では、指数が 1 つずれるため、指数は 1 から n までの n 個になる。

$n \geq 2$ のとき、指数 1 から $n - 1$ までの項は S_n と rS_n の両方に同じ符号で現れる。そのため、

$rS_n - S_n$ を考えると差が 0 になり、すべて消える。

残るのは、 rS_n 側の端の項 ar^n と、 S_n 側の端の項 a だけである。

$$rS_n - S_n = ar^n - a$$

左辺をまとめると、 $(r - 1)S_n = a(r^n - 1)$ となる。

$r \neq 1$ のとき、両辺を $r - 1$ で割ると、

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

を得る。

分子と分母の符号を同時に変えると、

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

とも表せる。

$n = 1$ の場合は共通して消える中間項はないが、 $rS_1 - S_1 = ar - a$ となり、 $(r - 1)S_1 = a(r - 1)$ という同じ関係が成立する。

3S		6	18	54	162
—	—	—	—	—	—
S	2	6	18	54	
—	—	—	—	—	—
2S	-2	0	0	0	162

⏟
 同じ3組が消える

$$2S = 162 - 2 = 160$$

図 1 上段-下段、すなわち $3S$ から S を引く。空欄は項がない位置であり、差を取る際は 0 として読む。共通の 6、18、54 が消え、残る $162 - 2$ から $2S = 160$ となる。

公式の使い分け

$r \neq 1$ のときは、

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

または

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

を使う。

$r = 1$ のときは全ての項が a であるため、 $S_n = na$ となる。

また、 $n = 1$ のときも公式と定義が一致する。

$r \neq 1$ の場合は、

$$\frac{a(r^1 - 1)}{r - 1} = \frac{a(r - 1)}{r - 1} = a$$

となる。

$r = 1$ の場合は、 $1 \cdot a = a$ である。

したがって、どちらの場合でも $S_1 = a$ となり、初めの 1 項の和として正しく一致する。

公式を使うときの注意

本講では初項 $a \neq 0$ 、公比 $r \neq 0$ の等比数列を扱う。

$r \neq 1$ のときは有限和の公式を使えるが、 $r = 1$ のときは分母が 0 になるため公式へ代入しない。

この場合は全ての項が a なので、 $S_n = na$ となる。

公比が負の場合、各項の符号は必ず交互に変化する。そのため、 r^n の符号は n の偶奇を確認して判断する。

また、本講で除外している初項 0、公比 0、 0^0 のような扱いを公式へ無理に持ち込まない。

例題 1

初項 2、公比 3 の等比数列について、初めの 4 項の和を求めよ。

例題 1 の解答・解説

初項 $a = 2$ 、公比 $r = 3$ 、項数 $n = 4$ である。

$r \neq 1$ なので公式を使う。

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{2(3^4 - 1)}{3 - 1} \\ &= \frac{2(81 - 1)}{2} \\ &= 80 \end{aligned}$$

直接足して確かめると、 $2 + 6 + 18 + 54 = 80$ であり、公式で求めた値と一致する。

したがって、初めの 4 項の和は 80 である。

例題 2

初項 8、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列について、初めの 5 項の和を求めよ。

例題 2 の解答・解説

初項 $a = 8$ 、公比 $r = \frac{1}{2}$ 、項数 $n = 5$ である。
 $r \neq 1$ なので公式を使う。

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{8\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{8\left(1 - \frac{1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} \\ &= 16 \cdot \frac{31}{32} \\ &= \frac{31}{2} \end{aligned}$$

直接足して確かめると、

$$8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{31}{2}$$

であり、公式で求めた値と一致する。
したがって、初めの 5 項の和は $\frac{31}{2}$ である。

例題 3

初項 3、公比 -2 の等比数列について、初めの 4 項の和を求めよ。

例題 3 の解答・解説

初項 $a = 3$ 、公比 $r = -2$ 、項数 $n = 4$ である。
負の公比では、指数の偶奇による符号に注意する。

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{3((-2)^4 - 1)}{-2 - 1} \\ &= \frac{3(16 - 1)}{-3} \\ &= -15 \end{aligned}$$

直接足して確かめると、 $3 - 6 + 12 - 24 = -15$ であり、公式で求めた値と一致する。
したがって、初めの 4 項の和は -15 である。

演習問題

練習問題 1

初項 3、公比 2 の等比数列について、初めの 6 項の和を求めよ。

練習問題 2

初項 5、公比 -3 の等比数列について、初めの 5 項の和を求めよ。

練習問題 3

初項 16、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列について、初めの 6 項の和を求めよ。

練習問題 4

初項 7、公比 1 の等比数列について、初めの 8 項の和を求めよ。

練習問題 5

初項 12、公比 4 の等比数列について、第 1 項から第 1 項までの和 S_1 を求め、公式と一致することを説明せよ。

練習問題 6

初項 2、公比 -2 の等比数列について、初めの 4 項の和と第 4 項の値をそれぞれ求め、和と末項の違いを説明せよ。

練習問題 7

初項 6、公比 3 の等比数列について、次の誤った計算のどこが誤りであるか説明し、正しい和を求めよ。

$$S_4 = \frac{6(3^4 - 1)}{1 - 3}$$

練習問題 8

初項 4、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列について、初めの 5 項の和を求めよ。

練習問題 1 の解答・解説

初項 $a = 3$ 、公比 $r = 2$ 、項数 $n = 6$ である。

$r \neq 1$ なので有限等比和の公式を使う。

$$\begin{aligned} S_6 &= \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} \\ &= 3(64 - 1) \\ &= 189 \end{aligned}$$

直接足して確認する。

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 = 189$$

したがって、初めの 6 項の和は 189 である。

練習問題 2 の解答・解説

初項 $a = 5$ 、公比 $r = -3$ 、項数 $n = 5$ である。

負の公比では、 r^n の符号に注意する。

$$(-3)^5 = -243$$

したがって、

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{5((-3)^5 - 1)}{-3 - 1} \\ &= \frac{5(-243 - 1)}{-4} \\ &= 305 \end{aligned}$$

直接足して確認する。

$$5 - 15 + 45 - 135 + 405 = 305$$

したがって、初めの 5 項の和は 305 である。

練習問題 3 の解答・解説

初項 $a = 16$ 、公比 $r = \frac{1}{2}$ 、項数 $n = 6$ である。

$$\begin{aligned} S_6 &= \frac{16\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 32\left(1 - \frac{1}{64}\right) \\ &= \frac{63}{2} \end{aligned}$$

直接足して確認する。

$$16 + 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{63}{2}$$

したがって、初めの 6 項の和は $\frac{63}{2}$ である。

練習問題 4 の解答・解説

初項 $a = 7$ 、公比 $r = 1$ である。

公比が 1 の場合、全ての項が 7 になるため、通常の公式は使わない。

$$S_8 = 8 \cdot 7 = 56$$

直接足して確認する。

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 56$$

したがって、初めの 8 項の和は 56 である。

練習問題 5 の解答・解説

初項 $a = 12$ 、公比 $r = 4$ 、項数 $n = 1$ である。

$r \neq 1$ なので公式を使える。

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{12(4^1 - 1)}{4 - 1} \\ &= \frac{12 \cdot 3}{3} \\ &= 12 \end{aligned}$$

直接足して確認すると、 $12 = 12$ となる。

$n = 1$ のとき、有限和は初項だけになるため、必ず $S_1 = a$ と一致する。

練習問題 6 の解答・解説

初項 $a = 2$ 、公比 $r = -2$ 、項数 $n = 4$ である。

まず有限和を求める。

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{2((-2)^4 - 1)}{-2 - 1} \\ &= \frac{2(16 - 1)}{-3} \\ &= -10 \end{aligned}$$

次に第 4 項を求める。

$$a_4 = 2(-2)^3 = -16$$

直接足して確認すると、 $2 - 4 + 8 - 16 = -10$ である。

したがって、初めの 4 項の和は -10 、第 4 項は -16 である。

和は複数の項を足した結果であり、末項は最後の 1 つの項の値であるため、同じものではない。

練習問題 7 の解答・解説

誤った式では、分子の形と分母の符号が一致していない。

公式

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

を使う場合、分母は $r - 1$ である。

与えられた式では、

$$\frac{6(3^4 - 1)}{1 - 3}$$

となっており、分母だけ符号が逆になっている。

正しくは、

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{6(3^4 - 1)}{3 - 1} \\ &= \frac{6(81 - 1)}{2} \\ &= 240 \end{aligned}$$

である。

直接足して確認する。

$$6 + 18 + 54 + 162 = 240$$

したがって、正しい和は 240 である。

引き算の順を変える場合は、分子と分母の両方の符号を変える必要がある。

練習問題 8 の解答・解説

初項 $a = 4$ 、公比 $r = -\frac{1}{2}$ 、項数 $n = 5$ である。
 $r \neq 1$ なので有限等比和の公式を使う。

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{4\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{4\left(1 + \frac{1}{32}\right)}{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{4 \cdot \frac{33}{32}}{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\frac{33}{8}}{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{33}{8} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

直接足して確認する。

$$4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{16 - 8 + 4 - 2 + 1}{4} = \frac{11}{4}$$

公式で求めた値と一致する。

したがって、初めの 5 項の和は $\frac{11}{4}$ である。