第 028 講 重力による位置エネルギー

この講でできるようになること

- 基準の高さと上向きの正方向を定め、位置エネルギーを符号付きで計算できる。
- 位置エネルギーの変化と重力の仕事を結び付け、移動方向による符号の違いを説明できる。
- 基準の高さや通る経路を変えても、同じ始点と終点の位置エネルギーの差と重力の仕事が変わらないことを確かめられる。
- 重力の仕事と持ち上げる力の仕事を区別し、運動エネルギーの変化を含めて判断できる。

高い場所の物体は、何が違うのか

同じ物体を手元から高い棚へ移すと、手を離した後に落ちることができる高さが増える。物体の速さが同じでも、地球との位置関係が違えば、重力が物体にできる仕事は違う。この違いを表すのが**重力による位置エネルギー**である。

ただし「高い場所」という言葉だけでは、高さを数値にできない。どの高さをゼロとするかを先に決める必要がある。本講では、地表付近で重力加速度の大きさ g が一定とみなせる範囲を考え、地球は動かないものとして扱う。物体は質点、または位置を重心で代表させた一定質量の物体とする。

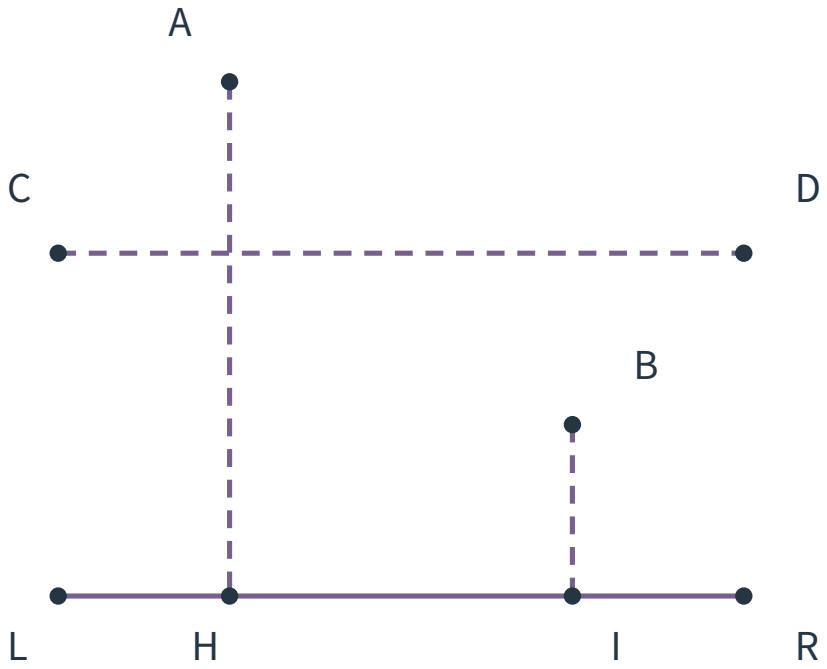
基準の高さと位置エネルギー

高さには正負がある

水平な**基準面**を一つ選び、その面での高さを $h=0$ とする。鉛直上向きを正とし、物体の代表点が基準面より上なら $h>0$、下なら $h<0$ である。h は基準面から測った符号付きの高さであり、移動した道のりそのものではない。

以下の図は位置と基準面の**幾何学的な模式図**である。横方向を x、鉛直上向きを y とし、両方向とも 1 座標単位は 1 m、尺度は等しい。物体の位置を A $(1\,\mathrm{m}, 3\,\mathrm{m})$、B $(3\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m})$ とする。実線 LR は初めの基準面 $y=0\,\mathrm{m}$、破線 CD は変更後の基準面 $y=2\,\mathrm{m}$ である。どちらも実際の床・壁を示す線ではなく、図中の線分は力や速度の矢印でもない。AH と BI は高さを読み取るための補助線であり、CD と AH の交点も物体を表さない。

©ミライコーチング



LR を基準とすれば A の高さは $+3\,\mathrm{m}$、B は $+1\,\mathrm{m}$ である。一方、CD を基準とすれば A は $+1\,\mathrm{m}$、B は $-1\,\mathrm{m}$ となる。同じ場所でも、**基準面を変えると高さの数値が変わる**ことが分かる。

重力による位置エネルギー

質量 m の物体について、重力加速度の大きさを g、指定した基準面から鉛直上向きに測った符号付き高さを h とすると、地表付近で g が一定の場合の重力による位置エネルギー U は

$$U = mgh$$

で表される。m の単位は kg、g は $\mathrm{m/s^2}$、h は m、U は J（ジュール）である。g は正の大きさであり、上か下かの符号は h に持たせる。

例えば $m = 2\,\mathrm{kg}$、$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ の場合、LR を基準とした A、B の位置エネルギーは、それぞれ

$$U_A = (2\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(3\,\mathrm{m}) = 60\,\mathrm{J},$$

$$U_B = (2\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(1\,\mathrm{m}) = 20\,\mathrm{J}$$

となる。位置エネルギーは、物体だけに独立に備わる量というより、**物体と地球の重力による相互作用に関する量**である。本講では地球を固定した近似により、物体の高さを使って表している。

©ミライコーチング

ゼロや負の値の意味

基準面で $U=0$ となっても、重力が消えるわけではない。上の例では基準面上でも重力の大きさは $(2\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})=20\,\mathrm{N}$ で、向きは下向きである。

基準面より下では $h<0$ なので $U<0$ となってよい。一方、運動エネルギー $K=\frac{1}{2}mv^2$ は $m>0$ である限り $K\geq 0$ であり、位置エネルギーと同じ理由で負にはならない。

重力の仕事は、位置エネルギーの減少分

重力の向きは鉛直下向きで、大きさは mg である。物体が A から B へ移動し、高さが h_A から h_B に変わったとき、重力のする仕事を W_g と書く。鉛直上向きを正にとると、重力の鉛直成分は $-mg$、高さの変化は h_B-h_A なので、

$$\begin{aligned} W_g &= -mg(h_B-h_A) \\ &= mg(h_A-h_B) \\ &= U_A-U_B \end{aligned}$$

となる。位置エネルギーの変化を「後−前」で $\Delta U=U_B-U_A$ と定義すると、次の関係が得られる。

重力の仕事と位置エネルギーの変化

$$W_g=-\Delta U$$

重力が正の仕事をすれば位置エネルギーは減り、重力が負の仕事をすれば位置エネルギーは増える。これは重力がした仕事についての関係であり、すべての力の仕事をまとめたものではない。

たとえば先ほどの A から B へ下がると、

$$\Delta U=20\,\mathrm{J}-60\,\mathrm{J}=-40\,\mathrm{J},$$

$$W_g=-(-40\,\mathrm{J})=+40\,\mathrm{J}$$

となる。下向きに移動するとき、重力は移動方向と同じ向きに働くので正の仕事をする。逆に B から A へ上がれば、$\Delta U=+40\,\mathrm{J}$、$W_g=-40\,\mathrm{J}$ となる。「上昇だから U が負」という判断ではなく、**基準からの高さ h の符号**と**変化量 ΔU の符号**を分けることが重要である。

符号を確かめる順序

始点と終点の高さを同じ基準で決め、$\Delta U=U_{\text{後}}-U_{\text{前}}$ を計算する。重力の仕事はその符号を反転させる。落下した距離は正の長さであり、それを無条件に負の高さと置き換えない。

基準面を変えても、差は変わらない

LR から CD へ基準面を 2 m 上げると、どの位置の高さも 2 m ずつ小さくなる。上と同じ $m = 2\,\mathrm{kg}$、$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ の物体なら、

$$U'_A = (2\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(1\,\mathrm{m}) = 20\,\mathrm{J},$$

$$U'_B = (2\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(-1\,\mathrm{m}) = -20\,\mathrm{J}$$

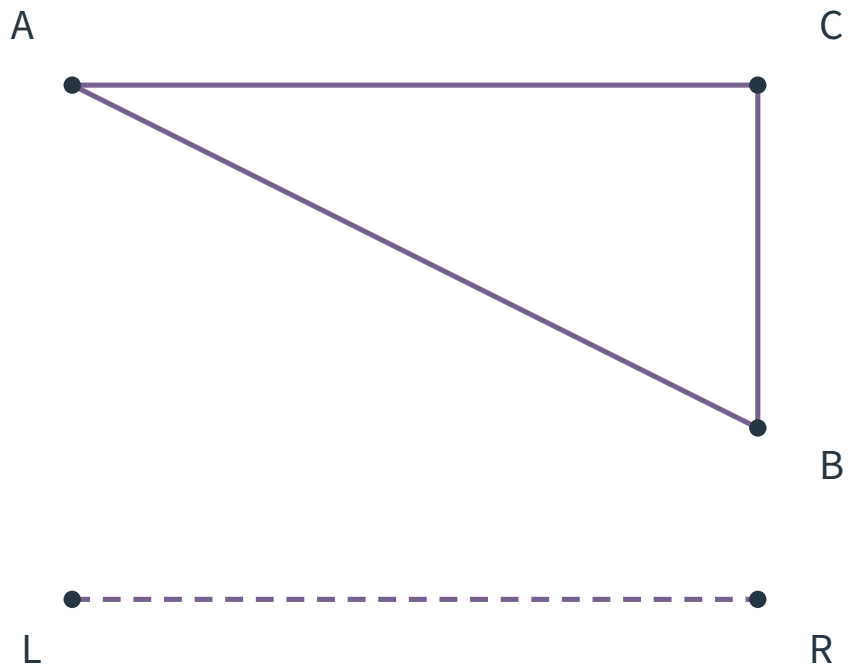
となる。A も B も位置エネルギーの値は元より 40 J 小さくなったが、差は

$$\Delta U' = (-20\,\mathrm{J}) - (20\,\mathrm{J}) = -40\,\mathrm{J}$$

と変わらない。一般にも、基準面を鉛直上向きに a だけ移せば各位置の高さは $h' = h - a$、位置エネルギーは $U' = U - mga$ となり、始点と終点に同じ定数を加えたり引いたりするだけである。よって ΔU と W_g は不変となる。計算の途中で基準面を無断で変更しないことが前提である。

重力の仕事は、通った経路の長さでは決まらない

同じ二点を結ぶ場合、まっすぐ進んでも、水平に移動してから鉛直に下がっても、重力の仕事は同じである。次の図では水平方向を x、鉛直上向きを y とし、いずれも 1 座標単位を 1 m とする。A $(0\,\mathrm{m}, 3\,\mathrm{m})$ から B $(4\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m})$ へ移動する二つの経路を、直線 AB と、A→C $(4\,\mathrm{m}, 3\,\mathrm{m})$→B で示す。破線 LR は $y = 0\,\mathrm{m}$ の基準面であり、実際の床ではない。実線は物体の**移動経路**であり、重力や速度の矢印ではない。なお、この図の A の x 座標は前の図と異なる。



質量 $1\,\mathrm{kg}$、$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とすれば、A→C は水平移動なので重力の仕事は $0\,\mathrm{J}$、C→B は $2\,\mathrm{m}$ の下降なので $(10\,\mathrm{N})(2\,\mathrm{m}) = +20\,\mathrm{J}$ である。一方、直線 AB の長さは $\sqrt{20}\,\mathrm{m}$ だが、下降した高さはやはり $2\,\mathrm{m}$ なので重力の仕事は $+20\,\mathrm{J}$ となる。**重力 mg に斜めの経路全長をそのまま掛けるのは誤り**である。

一般に、同じ高さで始まり同じ高さで終われば重力の仕事は $0\,\mathrm{J}$ である。ただし移動距離が $0\,\mathrm{m}$ という意味ではなく、摩擦力など他の力の仕事も $0\,\mathrm{J}$ と決まるわけではない。

重力の仕事と、ほかの力の仕事

第 027 講で扱った仕事と運動エネルギーの関係では、物体に働く**すべての力がする仕事の合計 W_{net}** が、運動エネルギーの変化 ΔK と等しい。

$$W_{\mathrm{net}} = \Delta K$$

重力と、物体を押したり持ち上げたりする一つの外力だけが仕事する場合、外力の仕事を W_{ext} とおけば、

$$W_g + W_{\mathrm{ext}} = \Delta K,$$

$$W_{\mathrm{ext}} = \Delta K + \Delta U$$

である。**外力の仕事が必ず ΔU に等しいわけではない**。始めと終わりの速さが同じで $\Delta K = 0\,\mathrm{J}$ のとき、特に一定速で持ち上げるときは $W_{\mathrm{ext}} = \Delta U$ となる。一方、速さが変化すると、外力の仕事は位置エネルギーの増加だけでなく運動エネルギーの変化にも関わる。

摩擦力など別の力も仕事するなら、その仕事を W_{other} として

$$W_{\mathrm{ext}} + W_{\mathrm{other}} = \Delta K + \Delta U$$

と表す。ここで W_{other} は重力と指定した外力以外の力の仕事の合計である。どの力の仕事を含めたかを明らかにすることが大切である。力学的エネルギー保存則の一般的な扱いは後の講で学ぶ。

例題

1

質量 $0.50\,\mathrm{kg}$ の小球が、ある水平な基準面から見て高さ $-2.0\,\mathrm{m}$ の点 P から高さ $+1.0\,\mathrm{m}$ の点 Q に移った。鉛直上向きを正、$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ とし、地表付近で g は一定とする。

(1) P、Q における重力による位置エネルギーを求めよ。

(2) P→Q の位置エネルギーの変化と重力の仕事を求め、それぞれの符号の理由を説明せよ。

解答・解説

(1) 基準面からの高さを符号付きで代入する。

$$U_P = (0.50\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2})(-2.0\,\mathrm{m}) = -9.8\,\mathrm{J},$$

$$U_Q = (0.50\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2})(1.0\,\mathrm{m}) = +4.9\,\mathrm{J}$$

(2) 後の値から前の値を引く。

$$\Delta U = 4.9\,\mathrm{J} - (-9.8\,\mathrm{J}) = +14.7\,\mathrm{J},$$

$$W_g = -(+14.7\,\mathrm{J}) = -14.7\,\mathrm{J}$$

小球は上昇して位置エネルギーが増えたが、下向きの重力は移動を妨げるため負の仕事をする。P で $U_P < 0$ であることと、P→Q で $\Delta U > 0$ であることは両立する。

2

質量 2.0 kg の物体が、初めの基準面から 3.0 m 上の点 A から 1.0 m 上の点 B へ移る。$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とし、今度は初めの基準面より 2.0 m 高い水平面を新しい基準面に選ぶ。上向きを正とする。

(1) 新しい基準面から見た A、B の高さと位置エネルギーを求めよ。

(2) 基準を変える前と後で、A→B の ΔU と W_g を比較せよ。

解答・解説

(1) 高さは $h'_A = 3.0\,\mathrm{m} - 2.0\,\mathrm{m} = +1.0\,\mathrm{m}$、$h'_B = 1.0\,\mathrm{m} - 2.0\,\mathrm{m} = -1.0\,\mathrm{m}$ である。よって

$$U'_A = (2.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(1.0\,\mathrm{m}) = 20\,\mathrm{J},$$

$$U'_B = (2.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(-1.0\,\mathrm{m}) = -20\,\mathrm{J}$$

(2) 初めの基準では $U_A = (2.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(3.0\,\mathrm{m}) = 60\,\mathrm{J}$、$U_B = (2.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(1.0\,\mathrm{m}) = 20\,\mathrm{J}$ である。したがって

$$\Delta U = 20\,\mathrm{J} - 60\,\mathrm{J} = -40\,\mathrm{J},$$

$$\Delta U' = -20\,\mathrm{J} - 20\,\mathrm{J} = -40\,\mathrm{J},$$

$$W_g = -\Delta U = +40\,\mathrm{J}$$

となり、基準変更後も同じ仕事を得る。基準を変えても、物体の実際の始点・終点と重力は変化しないからである。

3

質量 2.0 kg の物体を鉛直上向きに 2.0 m 持ち上げる。$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$、上向きを正とし、重力と持ち上げる力だけが仕事するとする。持ち上げる力の仕事を求めよ。

(1) 一定の速さで持ち上げた場合。

(2) 初めの速さが 1.0 m/s、終わりの速さが 3.0 m/s である場合。

解答・解説

どちらの場合も高さの変化は $+2.0\,\mathrm{m}$ なので、

$$\Delta U = (2.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(2.0\,\mathrm{m}) = +40\,\mathrm{J},$$
$$W_g = -40\,\mathrm{J}$$

である。

(1) 一定速なら $\Delta K = 0\,\mathrm{J}$ である。全仕事が $0\,\mathrm{J}$ だから、持ち上げる力の仕事は

$$W_{\mathrm{lift}} = 0\,\mathrm{J} - (-40\,\mathrm{J}) = +40\,\mathrm{J}$$

となる。

(2) 運動エネルギーの変化は

$$\Delta K = \frac{1}{2}(2.0\,\mathrm{kg})(3.0\,\mathrm{m/s})^2 - \frac{1}{2}(2.0\,\mathrm{kg})(1.0\,\mathrm{m/s})^2$$
$$= 9.0\,\mathrm{J} - 1.0\,\mathrm{J} = +8.0\,\mathrm{J}$$

である。したがって、持ち上げる力の仕事は

$$W_{\mathrm{lift}} = 8.0\,\mathrm{J} + 40\,\mathrm{J} = +48\,\mathrm{J}$$

となる。持ち上げる間に速さが増すなら、持ち上げる力が常に重力とつり合っているとは限らない。一定速の場合の $+40\,\mathrm{J}$ を無条件に使うことはできない。

演習問題

以下の数値は学習用の設定である。特に断りがなければ、地表付近で g は一定、物体の質量は一定、鉛直上向きを正とする。仕事と位置エネルギーは必ず正負を含めて答えよ。

1

質量 $1.5\,\mathrm{kg}$ の小物体が、基準面から高さ $4.0\,\mathrm{m}$ の A と高さ $1.0\,\mathrm{m}$ の B の間を移動する。$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1) A、B での重力による位置エネルギーを求めよ。

(2) A→B の ΔU と重力の仕事 W_g を求めよ。

(3) B→A の ΔU と W_g を求め、(2) と符号が反対になる理由を説明せよ。

2

演習 1 と同じ物体・二点 A、B を考える。基準面を初めより $2.0\,\mathrm{m}$ 高い位置へ変更する。$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$、上向きを正とする。

(1) 新しい基準面から見た A、B の符号付き高さを求めよ。

(2) 新しい基準面での U_A、U_B、A→B の ΔU、W_g を求めよ。

(3) 位置エネルギーの値が変わっても仕事が変わらない理由を説明せよ。

3

質量 0.80 kg の物体が、基準面より 1.5 m 下の P から基準面より 2.0 m 上の Q へ移動する。$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1) P、Q の符号付き高さと位置エネルギーを求めよ。

(2) P→Q の ΔU と W_g を求めよ。

(3) 基準面の高さにあるときの位置エネルギーと、物体に働く重力の大きさ・向きを答えよ。

(4) 「P では位置エネルギーが負だから、運動エネルギーも負になる」という主張が正しいか、理由とともに答えよ。

4

水平右向きを x、鉛直上向きを y とし、各座標の単位を m とする。質量 1.0 kg の物体が A $(0\,\mathrm{m}, 4\,\mathrm{m})$ から B $(3\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m})$ まで移動する。$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。経路 I は直線 A→B、経路 II は A→C $(3\,\mathrm{m}, 4\,\mathrm{m})$→B とし、水平面 $y = 0\,\mathrm{m}$ を位置エネルギーの基準とする。

(1) A→B の符号付き高さの変化 Δh と、経路 I に対する重力の仕事を求めよ。

(2) 経路 II の A→C、C→B それぞれの重力の仕事と、その合計を求めよ。

(3) 直線 AB の長さ $\sqrt{18}\,\mathrm{m}$ を、そのまま重力の大きさに掛けてはいけない理由を説明せよ。

(4) どちらかの経路を B→A と逆向きにたどるとき、重力の仕事はいくらか。

5

質量 3.0 kg の荷物を鉛直上向きに 1.5 m 持ち上げる。$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とし、仕事をする力は重力と手による上向きの力だけとする。

(1) 位置エネルギーの変化 ΔU と重力の仕事を求めよ。

(2) 一定の速さで持ち上げたときの運動エネルギーの変化と、手がする仕事を求めよ。

(3) 速さが 2.0 m/s から 4.0 m/s になった場合の ΔK と手がする仕事を求めよ。

(4) (2) と (3) の違いから、「持ち上げる手の力はいつでも重力の大きさに等しい」という主張の問題点を説明せよ。

6

質量 1.0 kg の小球を、水平な基準面から高さ 3.0 m の位置で静かに放した。小球が高さ 1.0 m の位置を通過するまで、空気抵抗を無視でき、**重力だけが仕事をする**。$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1) この間の ΔU と W_g を求めよ。

(2) この間の合力の仕事と運動エネルギーの変化を求めよ。

(3) 高さ 1.0 m を通過するときの速さを求めよ。必要なら小数第 2 位までの近似値も示せ。

(4) この結果において、重力の仕事と合力の仕事が等しくなる条件を説明せよ。

©ミライコーチング

7

質量 2.0 kg の物体を、高さ 1.0 m の A から高さ 4.0 m の B まで移し、その後 B から A に戻す。$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とし、上向きを正とする。別の場面として、同じ物体を高さを変えずに水平な粗い床の上で 3.0 m 滑らせるとき、進行方向と反対向きの動摩擦力の大きさが 2.0 N で一定であるとする。

(1) A→B と B→A で重力がする仕事をそれぞれ求めよ。

(2) A→B→A の往復全体で重力がする仕事と、位置エネルギーの変化を求めよ。

(3) 水平移動で重力がする仕事と動摩擦力がする仕事をそれぞれ求めよ。

(4) 「始点と終点が同じ高さなら、すべての力の仕事の合計は必ず 0 J である」という主張を検討し、理由を説明せよ。

8

質量 1.0 kg の物体が、粗い斜面に沿って上方へ移動し、鉛直方向の高さが 1.0 m 増えた。$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。移動中の運動エネルギーの変化は $+4.0\,\mathrm{J}$、斜面からの動摩擦力がする仕事は $-3.0\,\mathrm{J}$ であった。仕事をする力は重力、動摩擦力、物体を引く力だけとし、垂直抗力は物体の移動方向に垂直で仕事をしない。引く力の仕事を W_{pull} とする。

(1) 位置エネルギーの変化と重力がする仕事を求めよ。

(2) 仕事と運動エネルギーの関係から W_{pull} を求めよ。

(3) 動摩擦力の仕事を誤って省けば W_{pull} はいくらになるか。正しい値との差を求めよ。

(4) この場面で $W_{\mathrm{pull}} = \Delta U$ としてはいけない理由を、運動エネルギーと摩擦力の両方に触れて説明せよ。

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

1

(1) 基準面からの高さを用いると、

$$U_A = (1.5\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(4.0\,\mathrm{m}) = 60\,\mathrm{J},$$
$$U_B = (1.5\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(1.0\,\mathrm{m}) = 15\,\mathrm{J}$$

である。

(2) A→B の変化は

$$\Delta U = 15\,\mathrm{J} - 60\,\mathrm{J} = -45\,\mathrm{J},$$
$$W_g = -(-45\,\mathrm{J}) = +45\,\mathrm{J}$$

となる。下降では重力が移動を助ける。

(3) B→A では始点と終点が逆転するため、

$$\Delta U = 60\,\mathrm{J} - 15\,\mathrm{J} = +45\,\mathrm{J},$$
$$W_g = -(+45\,\mathrm{J}) = -45\,\mathrm{J}$$

となる。上昇では下向きの重力が移動と反対向きになるため、仕事の符号も反転する。

2

(1) 新しい基準面は初めより 2.0 m 高いので、

$$h'_A = 4.0\,\mathrm{m} - 2.0\,\mathrm{m} = +2.0\,\mathrm{m},$$
$$h'_B = 1.0\,\mathrm{m} - 2.0\,\mathrm{m} = -1.0\,\mathrm{m}$$

である。

(2) 位置エネルギーは

$$U'_A = (1.5\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(2.0\,\mathrm{m}) = 30\,\mathrm{J},$$
$$U'_B = (1.5\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(-1.0\,\mathrm{m}) = -15\,\mathrm{J}$$

なので、

$$\Delta U' = -15\,\mathrm{J} - 30\,\mathrm{J} = -45\,\mathrm{J},$$
$$W_g = -(-45\,\mathrm{J}) = +45\,\mathrm{J}$$

となる。

(3) 基準変更によって両点の位置エネルギーから同じ 30 J が引かれるが、差を取るとその分は打ち消し合う。重力の仕事は $-\Delta U$ なので変わらない。

3

(1) $h_P = -1.5\,\mathrm{m}$、$h_Q = +2.0\,\mathrm{m}$ である。したがって、

$$U_P = (0.80\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(-1.5\,\mathrm{m}) = -12\,\mathrm{J},$$

$$U_Q = (0.80\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(2.0\,\mathrm{m}) = +16\,\mathrm{J}$$

となる。

(2) $\Delta U = +16\,\mathrm{J} - (-12\,\mathrm{J}) = +28\,\mathrm{J}$、$W_g = -(+28\,\mathrm{J}) = -28\,\mathrm{J}$ である。上昇のため位置エネルギーは増加し、重力は負の仕事をする。

(3) 基準面では $h = 0\,\mathrm{m}$ なので $U = (0.80\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(0\,\mathrm{m}) = 0\,\mathrm{J}$ である。一方、重力の大きさは $(0.80\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) = 8.0\,\mathrm{N}$ で、向きは鉛直下向きである。

(4) 誤りである。$U < 0$ は基準面より下にあることを表す。一方、運動エネルギーは $K = \frac{1}{2}mv^2$ であり、$m > 0$、$v^2 \geq 0$ から $K \geq 0$ である。

4

(1) A→B の高さの変化は $\Delta h = 1\,\mathrm{m} - 4\,\mathrm{m} = -3\,\mathrm{m}$ である。よって、経路 I の重力の仕事は

$$W_g = -(1.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(-3\,\mathrm{m}) = +30\,\mathrm{J}$$

となる。

(2) A→C は同じ高さなので $W_g = 0\,\mathrm{J}$ である。C→B では高さが 4 m から 1 m へ下がり、

$$W_{g,\mathrm{CB}} = -(1.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(1\,\mathrm{m} - 4\,\mathrm{m}) = +30\,\mathrm{J}$$

となる。合計は $0\,\mathrm{J} + 30\,\mathrm{J} = +30\,\mathrm{J}$ で、経路 I と一致する。

(3) 仕事は力の**移動方向の成分**と移動距離から決まる。重力は鉛直下向きであり、斜めの全移動距離が重力と同じ向きではない。高さの減少分 3 m に対応する重力の仕事だけを数えるので、$mg\sqrt{18}\,\mathrm{m}$ としてはならない。

(4) B→A は鉛直上向きに 3 m の高さ変化となるため、経路によらず $W_g = -30\,\mathrm{J}$ である。

5

(1) 高さは $+1.5\,\mathrm{m}$ 増えるので、

$$\Delta U = (3.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(1.5\,\mathrm{m}) = +45\,\mathrm{J},$$
$$W_g = -45\,\mathrm{J}$$

である。

(2) 一定の速さでは $\Delta K = 0\,\mathrm{J}$ なので、手の仕事は $W_{\mathrm{hand}} = \Delta K + \Delta U = 0\,\mathrm{J} + 45\,\mathrm{J} = +45\,\mathrm{J}$ となる。

(3) 運動エネルギーの変化は

$$\Delta K = \frac{1}{2}(3.0\,\mathrm{kg})(4.0\,\mathrm{m/s})^2 - \frac{1}{2}(3.0\,\mathrm{kg})(2.0\,\mathrm{m/s})^2$$
$$= 24\,\mathrm{J} - 6.0\,\mathrm{J} = +18\,\mathrm{J}$$

である。したがって手の仕事は $W_{\mathrm{hand}} = 18\,\mathrm{J} + 45\,\mathrm{J} = +63\,\mathrm{J}$ である。

(4) (2) のように一定速で鉛直に持ち上げる場合は、重力と手の力がつり合う。(3) では運動エネルギーが増えているので、手がする仕事は重力の負の仕事を打ち消す分より大きい。手の力を運動中いつでも mg と決めるのは誤りである。

6

(1) 高さは $3.0\,\mathrm{m}$ から $1.0\,\mathrm{m}$ に下がる。

$$\Delta U = (1.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(1.0\,\mathrm{m} - 3.0\,\mathrm{m}) = -20\,\mathrm{J},$$
$$W_g = -(-20\,\mathrm{J}) = +20\,\mathrm{J}$$

(2) この間に仕事をする力は重力だけなので、合力の仕事は $W_{\mathrm{net}} = W_g = +20\,\mathrm{J}$ となる。仕事と運動エネルギーの関係から $\Delta K = +20\,\mathrm{J}$ である。

(3) 初めは静止していて $K_{\text{初}} = 0\,\mathrm{J}$ である。したがって

$$\frac{1}{2}(1.0\,\mathrm{kg})v^2 = 20\,\mathrm{J},$$
$$v^2 = 40\,\mathrm{m^2/s^2},$$
$$v = \sqrt{40}\,\mathrm{m/s} \approx 6.32\,\mathrm{m/s}$$

となる。速さなので正の値を採用する。

(4) 重力以外が仕事をしないため、合力がする仕事の合計と重力の仕事が一致する。ほかの力が仕事をすれば、一般には重力の仕事だけで ΔK を決めることはできない。

7

(1) A→B では $\Delta h = 4.0\,\mathrm{m} - 1.0\,\mathrm{m} = +3.0\,\mathrm{m}$ なので、

$$W_{g,\mathrm{AB}} = -(2.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(3.0\,\mathrm{m}) = -60\,\mathrm{J}$$

となる。B→A は逆向きの高さ変化 $-3.0\,\mathrm{m}$ なので $W_{g,\mathrm{BA}} = +60\,\mathrm{J}$ である。

(2) 往復の重力の仕事は $-60\,\mathrm{J} + 60\,\mathrm{J} = 0\,\mathrm{J}$ である。始点と終点の高さが同じであるため、位置エネルギーの変化も $\Delta U = 0\,\mathrm{J}$ となる。各片道の仕事は $0\,\mathrm{J}$ ではない。

(3) 水平移動では高さの変化が $0\,\mathrm{m}$ なので、重力の仕事は $W_g = 0\,\mathrm{J}$ である。動摩擦力は進行方向と逆向きなので、

$$W_f = -(2.0\,\mathrm{N})(3.0\,\mathrm{m}) = -6.0\,\mathrm{J}$$

となる。

(4) 誤りである。同じ高さという条件から分かるのは $W_g = 0\,\mathrm{J}$ だけである。(3) の摩擦力は $-6.0\,\mathrm{J}$ の仕事をする。ほかの力が仕事をしなければ合計は $-6.0\,\mathrm{J}$ になり、別の力が仕事するならその分も加える必要がある。重力の往復仕事が $0\,\mathrm{J}$ でも、摩擦の仕事が打ち消されるとは限らない。

8

(1) 鉛直方向に $+1.0\,\mathrm{m}$ 上がるので、

$$\Delta U = (1.0\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2})(1.0\,\mathrm{m}) = +10\,\mathrm{J},$$
$$W_g = -10\,\mathrm{J}$$

である。

(2) 仕事をする力をすべて足すと

$$W_{\mathrm{pull}} + (-3.0\,\mathrm{J}) + (-10\,\mathrm{J}) = +4.0\,\mathrm{J},$$
$$W_{\mathrm{pull}} = 4.0\,\mathrm{J} + 3.0\,\mathrm{J} + 10\,\mathrm{J}$$
$$= +17.0\,\mathrm{J}$$

となる。斜面に沿った距離ではなく、高さの増加分から重力の仕事を求めた。

(3) 摩擦の仕事を省くと、誤った計算結果は $W_{\mathrm{pull}} = 4.0\,\mathrm{J} + 10\,\mathrm{J} = 14.0\,\mathrm{J}$ である。正しい $17.0\,\mathrm{J}$ より $3.0\,\mathrm{J}$ 小さい。

(4) ここでは $\Delta K = +4.0\,\mathrm{J}$ であり、物体の速さに関わるエネルギーも増えている。さらに摩擦力が $-3.0\,\mathrm{J}$ の仕事をするので、引く力は位置エネルギーの増加 $+10\,\mathrm{J}$ だけでなく、運動エネルギーの増加と摩擦による負の仕事も補う必要がある。正しい関係は $W_{\mathrm{pull}} + W_f = \Delta K + \Delta U$ である。