

第 67 講 条件付き確率

学習目標

- ・「事象 B が起こったと分かっているもとで、事象 A が起こる確率」の意味を説明できる。
- ・条件が与えられたとき、考える標本空間を事象 B に属する結果へ絞れる。
- ・ $P(B) > 0$ のとき、条件付き確率 $P(A | B)$ を求められる。
- ・ $P(A | B)$ と通常確率 $P(A)$ 、また $P(A | B)$ と $P(B | A)$ を区別できる。

条件が加わると、考える「全体」が変わる

さいころの結果について新しい情報を得る

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。

何も情報がないとき、起こりうる結果は、

1, 2, 3, 4, 5, 6

の 6 通りです。

ここで、

「4 以上の目が出た」

と分かったとします。

すると、実際に起こった可能性があるのは、

4, 5, 6

の 3 通りだけです。

この時点では、もとの 6 通りではなく、この 3 通りを新しい「全体」として考えます。

条件付き確率では、与えられた情報によって標本空間を絞ることが中心になります。

条件付き確率の本質

条件付き確率では、

条件として分かっている事象に、まず全体を絞る

ことが最も大切です。

その絞られた全体の中で、求める事象がどれだけ含まれているかを考えます。

条件付き確率の意味

条件付き確率

事象 B が起こったと分かっているもとで、事象 A が起こる確率を、 B のもとでの A の条件付き確率といい、

$$P(A | B)$$

と表します。

これは、

「 B が起こった」という条件のもとで、「 A が起こる」確率

という意味です。

記号の読み方

$P(A | B)$ では、

- ・ A : 求めたい事象
- ・ B : すでに起こったと分かっている事象

です。

縦線の右側が「条件」であることを確認します。

標本空間を B に絞って考える

公正なさいころの例

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。

事象 A を「偶数の目が出る」、事象 B を「4 以上の目が出る」とします。

それぞれ、

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{4, 5, 6\}$$

です。

今回は「 B が起こった」と分かっています。

したがって、考える全体は、

$$\{4, 5, 6\}$$

の 3 通りです。

この 3 通りの中で A も満たすものは、

$$4, 6$$

の 2 通りです。

よって、

$$P(A | B) = \frac{2}{3}$$

です。

見る範囲	結果
もとの標本空間	1, 2, 3, 4, 5, 6
条件 B を満たす結果	4, 5, 6
B の中で A も満たす結果	4, 6

場合の数で求めるとき

根元事象が同様に確からしい場合、 $P(A | B)$ は、

$$\frac{A \text{ と } B \text{ の両方を満たす場合の数}}{B \text{ を満たす場合の数}}$$

と考えられます。

分母は、もとの標本空間全体ではなく、条件 B を満たす場合の数です。

分子は A と B の共通部分

B の中で A も起こる部分を見る

「B が起こったと分かっているもとで A も起こる」ためには、結果が A と B の両方に属している必要があります。

その部分が、

$$A \cap B$$

です。

したがって、条件付き確率では、

- 分母では B
- 分子では $A \cap B$

に注目します。

条件付き確率の公式

$P(B) > 0$ のとき、

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

です。

公式を意味から覚える

条件付き確率の公式は、

B 全体の中で、A も起こっている部分の割合

を表しています。

分母が $P(B)$ になるのは、条件 B を新しい全体として考えているからです。

$P(B) > 0$ が必要

公式では $P(B)$ で割ります。

そのため、

$$P(B) > 0$$

であることが必要です。

起こる可能性がない事象を「起こったと分かっている条件」として、この公式で扱うことはできません。

場合の数と公式は同じ考えを表す

番号カードで確かめる

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 と書かれた 8 枚のカードから 1 枚を無作為に選びます。

事象 A を「5 より大きい数を選ぶ」、事象 B を「偶数を選ぶ」とします。

$$A = \{6, 7, 8\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8\}$$

です。

B が起こったと分かっているので、新しい全体は、

$$2, 4, 6, 8$$

の 4 通りです。

この中で A も満たすものは、

$$6, 8$$

の 2 通りなので、

$$P(A | B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

です。

一方、

$$P(A \cap B) = \frac{2}{8}$$

$$P(B) = \frac{4}{8}$$

ですから、

$$P(A | B) = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{2}$$

となります。

場合の数で考えても、公式を使っても同じ結果になります。

条件を知る前と知った後

条件によって確率が変わることがある

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。

事象 A を「偶数の目が出る」、事象 B を「4 以上の目が出る」とします。

条件を何も知らないときは、

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。

一方、「4 以上の目が出た」と分かっていると、

$$P(A | B) = \frac{2}{3}$$

です。

この例では、

$$P(A) \neq P(A | B)$$

です。

新しい情報 B を得たことで、考える全体が変わり、 A の確率も変わりました。

条件付き確率は情報を反映した確率

通常の $P(A)$ は、条件を加える前の確率です。

$P(A | B)$ は、 B が起こったという情報を得た後の確率です。

2つを同じものとして扱わないようにします。

独立との違いを確認する

独立なら条件を知っても確率が変わらない

事象 A と B が独立で、 $P(B) > 0$ である場合には、 B が起こったと分かっても A の起こりやすさは変わりません。

そのため、

$$P(A | B) = P(A)$$

となります。

一方、先ほどのさいころの例では、

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

に対して、

$$P(A | B) = \frac{2}{3}$$

でした。

条件を知ることで確率が変わっているので、この A と B は独立ではありません。

この講では、条件付き確率と独立を混同しないために、この違いだけを押さえます。

$P(A|B)$ と $P(B|A)$ は別の意味

$P(A | B)$ は「 B が起こったもとでの A 」です。

$P(B | A)$ は「 A が起こったもとでの B 」です。

条件となる事象が逆なので、一般には同じ値にはなりません。

条件付き確率を求める手順

基本手順

1. 条件として分かっている事象 B を確認する。
2. 標本空間を B に属する結果だけへ絞る。
3. その中で A も満たす結果、つまり $A \cap B$ を確認する。
4. 同様に確からしい場合は、「 $A \cap B$ の場合の数 ÷ B の場合の数」とする。
5. 確率が与えられている場合は、 $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ を使う。
6. 答えが 0 以上 1 以下であることを確認する。

例題

例題 1

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。

事象 A を「偶数の目が出る」、事象 B を「3 以上の目が出る」とします。

$P(A | B)$ を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

条件 B を満たす目は、

$$B = \{3, 4, 5, 6\}$$

の 4 通りです。

この中で A も満たす偶数の目は、

$$4, 6$$

の 2 通りです。

したがって、

$$P(A | B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

です。

条件付き確率では、分母をもとの 6 通りではなく、条件 B を満たす 4 通りに絞ります。

例題 2

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 と書かれた 9 枚のカードから 1 枚を無作為に選びます。

事象 A を「3 の倍数を選ぶ」、事象 B を「奇数を選ぶ」とします。

$P(A | B)$ を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

条件 B を満たす奇数は、

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

の 5 通りです。

この中で 3 の倍数でもあるものは、

$$3, 9$$

の 2 通りです。

したがって、

$$P(A | B) = \frac{2}{5}$$

です。

例題 3

ある試行で、

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{3}{5}$$

であるとします。

$P(A | B)$ を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

$P(B) = \frac{3}{5} > 0$ なので、条件付き確率の公式を使えます。

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

より、

$$P(A | B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{12}$$

です。

演習問題**練習問題 1**

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。

事象 A を「4 以上の目が出る」、事象 B を「偶数の目が出る」とします。

$P(A | B)$ を求めなさい。

練習問題 2

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。

事象 A を「3 の倍数の目が出る」、事象 B を「2 以上 5 以下の目が出る」とします。

$P(A | B)$ を求めなさい。

練習問題 3

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 と書かれた 8 枚のカードから 1 枚を無作為に選びます。

事象 A を「6 以上の数を選ぶ」、事象 B を「偶数を選ぶ」とします。

$P(A | B)$ を求めなさい。

練習問題 4

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 と書かれた 10 枚のカードから 1 枚を無作為に選びます。

事象 A を「5 の倍数を選ぶ」、事象 B を「偶数を選ぶ」とします。

条件 B のもとで考える結果をすべて列挙し、 $P(A | B)$ を求めなさい。

練習問題 5

ある試行で、

$$P(A \cap B) = \frac{2}{15}$$

$$P(B) = \frac{2}{5}$$

です。

$P(A | B)$ を求めなさい。

練習問題 6

ある試行で、

$$P(A \cap B) = \frac{3}{10}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

です。

$P(A | B)$ を求めなさい。

練習問題 7

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。

事象 A を「偶数の目が出る」、事象 B を「4 以上の目が出る」とします。

(1) $P(A)$ を求めなさい。

(2) $P(A | B)$ を求めなさい。

(3) 条件 B を知ることで、 A の確率が変化したか答えなさい。

練習問題 8

ある生徒は、公正な 6 面さいころを 1 回投げるとき、

- ・ A : 「5 以上の目が出る」
- ・ B : 「奇数の目が出る」

として、 $P(A | B)$ を求める際に分母を 6 としました。

この考えの誤りを説明し、正しい $P(A | B)$ を求めなさい。

練習問題 9

1, 2, 3, 4, 5, 6 と書かれた 6 枚のカードから 1 枚を無作為に選びます。

事象 A を「4 以下の数を選ぶ」、事象 B を「偶数を選ぶ」とします。

(1) $P(A | B)$ を求めなさい。

(2) $P(B | A)$ を求めなさい。

(3) 2 つの値を比較し、 $P(A | B)$ と $P(B | A)$ が同じとは限らないことを確認しなさい。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

条件 B を満たす偶数の目は、

$$B = \{2, 4, 6\}$$

の 3 通りです。

この中で 4 以上の目は、

$$4, 6$$

の 2 通りです。

したがって、

$$P(A | B) = \frac{2}{3}$$

です。

練習問題 2 の解答・解説

条件 B を満たす目は、

$$B = \{2, 3, 4, 5\}$$

の 4 通りです。

この中で 3 の倍数は 3 だけなので、1 通りです。

したがって、

$$P(A | B) = \frac{1}{4}$$

です。

練習問題 3 の解答・解説

偶数のカードは、

$$B = \{2, 4, 6, 8\}$$

の 4 通りです。

この中で 6 以上のカードは、

$$6, 8$$

の 2 通りです。

したがって、

$$P(A \mid B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

です。

練習問題 4 の解答・解説

条件 B は「偶数を選ぶ」なので、条件のもとで考える結果は、

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

の 5 通りです。

この中で 5 の倍数でもあるものは、

$$10$$

だけです。

したがって、

$$P(A \mid B) = \frac{1}{5}$$

です。

練習問題 5 の解答・解説

条件付き確率の公式より、

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

です。

したがって、

$$P(A \mid B) = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}} = \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1}{3}$$

です。

練習問題 6 の解答・解説

条件付き確率の公式より、

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

です。

したがって、

$$P(A \mid B) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{10} \cdot 2 = \frac{3}{5}$$

です。

練習問題 7 の解答・解説

(1) 偶数の目は、

$$2, 4, 6$$

の 3 通りなので、

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。

(2) 条件 B のもとでは、

$$B = \{4, 5, 6\}$$

の 3 通りだけを考えます。

その中で偶数は、

$$4, 6$$

の 2 通りなので、

$$P(A \mid B) = \frac{2}{3}$$

です。

(3) $\frac{1}{2}$ と $\frac{2}{3}$ は異なるので、条件 B を知ることで A の確率は変化しています。

練習問題 8 の解答・解説

条件付き確率では、条件 B を満たす結果だけを新しい全体として考えます。
奇数の目は、

$$B = \{1, 3, 5\}$$

の 3 通りです。
この中で 5 以上の目は、

$$5$$

の 1 通りです。
したがって、

$$P(A \mid B) = \frac{1}{3}$$

です。
分母を 6 にすると、「奇数の目が出た」という条件を反映できていません。

練習問題 9 の解答・解説

事象は、

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

です。
両方を満たす結果は、

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

です。
(1) B の 3 通りの中で A も満たすものは 2 通りなので、

$$P(A \mid B) = \frac{2}{3}$$

です。
(2) A の 4 通りの中で B も満たすものは 2 通りなので、

$$P(B \mid A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

です。
(3)

$$\frac{2}{3} \neq \frac{1}{2}$$

です。
したがって、 $P(A \mid B)$ と $P(B \mid A)$ は一般に同じ値とは限りません。条件としている事象が異なるため、それぞれ別の確率です。