第 226 講 内積と 2 ベクトルのなす角

学習目標

- 2 つのベクトルのなす角を、始点をそろえて説明できる。
- 内積と大きさからなす角の余弦を求められる。
- 内積の符号から、なす角が鋭角・直角・鈍角のどれかを判断できる。
- 同方向・逆方向と、なす角の端点を結び付けられる。
- 零ベクトルを含むとき、なす角を定めない理由を説明できる。

1. 2 つのベクトルのなす角

なす角は始点をそろえて測る

0 でない 2 つのベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ を平行移動して始点をそろえる。このとき、2 本のベクトルの間にできる小さい方の角 θ を、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角という。

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

弧度法では $0 \leq \theta \leq \pi$ である。

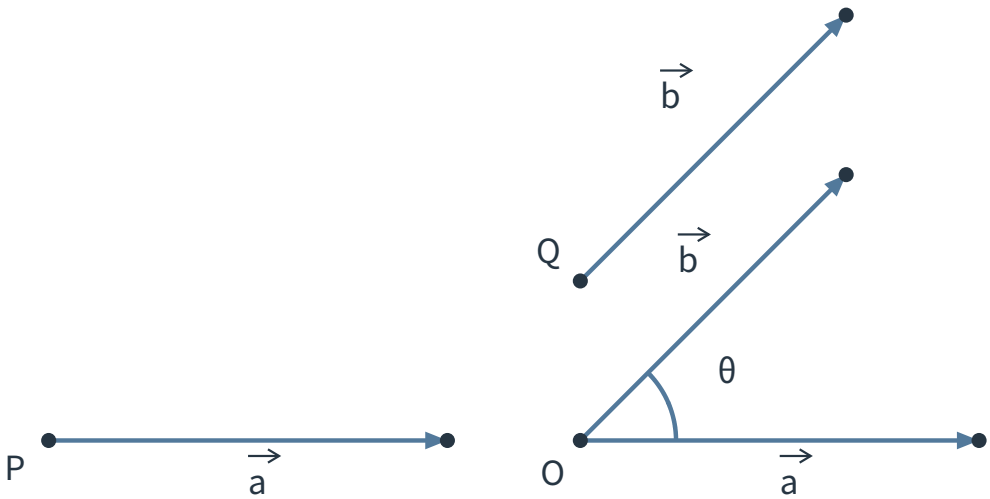

図 1　離れた位置のベクトルも平行移動して始点をそろえる

平行移動しても角の情報は変わらない

ベクトルは大きさと向きで決まり、置かれた場所にはよらない。したがって、平行移動して始点をそろえてよい。図の右側で、$\vec{a}$ から $\vec{b}$ までの小さい方の回転がなす角である。向きまで同じなら 0°、向きが正反対なら 180° である。

矢印の終点どうしを結んだ角ではない

図の中で矢印が離れているとき、その場で終点どうしを結んで角を測るのではない。必ず代表する矢印を平行移動し、始点をそろえて考える。

2. 内積からなす角を求める

なす角の余弦を求める公式

0 でない 2 つのベクトルについて、内積の定義

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|\cos\theta$$

を $|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|$ で割ると、

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|}$$

を得る。$0\le\theta\le\pi$ の範囲では、余弦の値から θ が 1 つに定まる。

成分表示から求める手順

$\vec{a}=(a_1,a_2)$、$\vec{b}=(b_1,b_2)$ とする。

1. 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ を求める。
2. 大きさ $|\,\vec{a}\,|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$、$|\,\vec{b}\,|=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$ を求める。
3. 公式に代入して $\cos\theta$ を求める。
4. $0^\circ\le\theta\le180^\circ$ の範囲で角を決める。

公式の値が−1 以上 1 以下になる理由

なす角が存在するとき $-1\le\cos\theta\le1$ であるから、

$$-1\le\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|}\le1$$

である。したがって、$|\,\vec{a}\cdot\vec{b}\,|\le|\,\vec{a}\,||\,\vec{b}\,|$ である。計算結果がこの範囲から外れたなら、内積か大きさの計算を見直す。

©ミライコーチング

3. 内積の符号と角

正・0・負から角の種類を判定する

0 でない 2 つのベクトルでは分母 $|\vec{a}|\,|\vec{b}|$ は正である。したがって、$\cos\theta$ の符号は内積の符号と同じである。

- $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$ なら、$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ である。同方向でなければ鋭角である。
- $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ なら、$\theta = 90^\circ$ である。
- $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$ なら、$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ である。逆方向でなければ鈍角である。

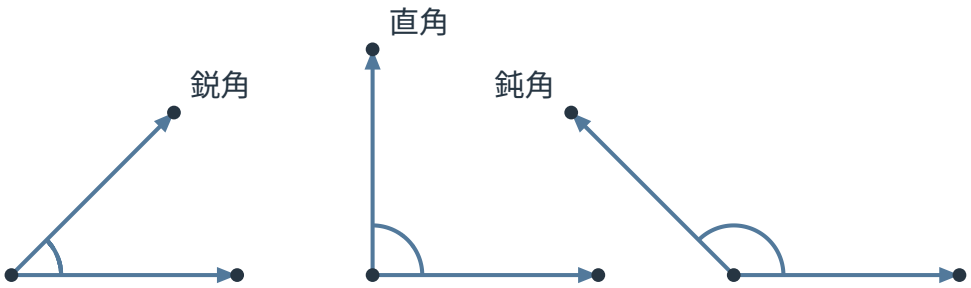

図 2　内積の符号と鋭角・直角・鈍角の対応

零ベクトルとのなす角は定めない

零ベクトルには向きがなく、$|\vec{0}| = 0$ なので、余弦の公式では分母が 0 になる。したがって、零ベクトルと他のベクトルのなす角は定めない。$\vec{0}\cdot\vec{b} = 0$ であっても、そこからなす角が 90° であるとは言えない。

4. 例題

例題 1：成分からなす角を求める

$\vec{a} = (1, 1)$、$\vec{b} = (1, 0)$ のなす角 θ を求めよ。

例題 1 の解答・解説

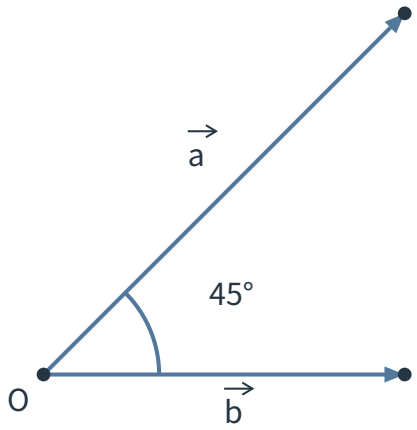

図 3　例題 1 の 2 ベクトルと 45°のなす角

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1,\qquad |\,\vec{a}\,|=\sqrt{2},\qquad |\,\vec{b}\,|=1$$

より、

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

である。$0^\circ\le\theta\le180^\circ$ より、$\theta=45^\circ$ である。

例題 2：直角を見抜いて求める

$\vec{a}=(1,2)$、$\vec{b}=(-2,1)$ のなす角を求めよ。

例題 2 の解答・解説

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-2)+2\cdot1=0$$

であり、両方とも零ベクトルではない。したがって、なす角は 90° である。

例題 3：逆方向のベクトル

$\vec{a}=(2,-1)$、$\vec{b}=(-6,3)$ のなす角を求めよ。

例題 3 の解答・解説

$\vec{b} = -3\vec{a}$ なので、2 つのベクトルは逆方向である。したがって、なす角は 180° である。
公式で確かめると、

$$\cos\theta = \frac{-15}{\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}} = -1$$

となり、同じ結論を得る。

例題 4：パラメータと角の種類

$\vec{a} = (k, 1)$、$\vec{b} = (2, -1)$ とする。2 つのベクトルのなす角が鋭角となる k の範囲を求めよ。

例題 4 の解答・解説

$\vec{b}$ は零ベクトルではなく、$\vec{a} = (k, 1)$ も常に零ベクトルではない。$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は同方向にはなり得ない。この場合、鋭角となる条件は内積が正であることなので、

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2k - 1 > 0$$

である。したがって、$k > \frac{1}{2}$ である。

5. 演習問題

演習 1：60°を求める

$\vec{a} = (1, 0)$、$\vec{b} = \left(1, \sqrt{3}\right)$ のなす角を求めよ。

演習 2：135°を求める

$\vec{a} = (1, 1)$、$\vec{b} = (-1, 0)$ のなす角を求めよ。

演習 3：内積の符号から判定する

$\vec{a} = (-2, 3)$、$\vec{b} = (4, 1)$ のなす角が鋭角・直角・鈍角のどれであるか答えよ。

演習 4：同方向を確かめる

$\vec{a} = (-1, 2)$、$\vec{b} = (-3, 6)$ のなす角を求めよ。

演習 5：座標から 2 本のベクトルを作る

点 $A(1, 1)$、$B(4, 1)$、$C\left(2, 1+\sqrt{3}\right)$ に対して、$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角を求めよ。

演習 6：パラメータで直角を作る

$\vec{a} = (t, 2)$、$\vec{b} = (3, -6)$ のなす角が 90° となるように、t を定めよ。

©ミライコーチング

演習 7：零ベクトルを含む場合

$\vec{a}=(3,-2)$、$\vec{b}=(0,0)$ とする。$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求め、2 つのベクトルのなす角について述べよ。

演習 8：余弦の範囲で検算する

0 でない 2 つのベクトルについて、$|\,\vec{a}\,|=2$、$|\,\vec{b}\,|=5$、$\vec{a}\cdot\vec{b}=12$ という 3 条件が同時に成り立つか判定せよ。

6. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1,\qquad |\,\vec{a}\,|=1,\qquad |\,\vec{b}\,|=2$$

より、$\cos\theta=\frac{1}{2}$ である。したがって、$\theta=60^\circ$ である。

演習 2 の解答・解説

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1,\qquad |\,\vec{a}\,|=\sqrt{2},\qquad |\,\vec{b}\,|=1$$

より、$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ である。したがって、$\theta=135^\circ$ である。

演習 3 の解答・解説

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-2)\cdot 4+3\cdot 1=-5<0$$

である。両方とも零ベクトルではなく、互いに実数倍でもないので、なす角は鈍角である。

演習 4 の解答・解説

$\vec{b}=3\vec{a}$ であり、正の実数倍なので 2 つは同方向である。したがって、なす角は 0° である。

演習 5 の解答・解説

$$\overrightarrow{AB}=(3,0),\qquad \overrightarrow{AC}=\left(1,\sqrt{3}\right)$$

である。したがって、

$$\cos\theta=\frac{3}{3\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

より、なす角は 60° である。

演習 6 の解答・解説

2 つはどの t に対しても零ベクトルではない。なす角が 90° となる条件は内積が 0 であることなので、

$$3t+2\cdot(-6)=0$$

より、$3t-12=0$ である。したがって、$t=4$ である。

演習 7 の解答・解説

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot 0+(-2)\cdot 0=0$$

である。しかし、$\vec{b}=\vec{0}$ には向きがないので、2 つのベクトルのなす角は定めない。

演習 8 の解答・解説

条件が成り立つなら、

$$\cos\theta=\frac{12}{2\cdot 5}=\frac{6}{5}$$

となる。しかし、余弦の値は -1 以上 1 以下なので、これは不可能である。したがって、3 条件は同時には成り立たない。

©ミライコーチング