

第 61 講 確率とは何か

学習目標

- ・ 根元事象・標本空間・事象の意味を区別して説明できる。
- ・ 「同様に確からしい」とは何かを具体例で判断できる。
- ・ 同様に確からしい場合に、場合の数の比として確率を求められる。
- ・ 確率が 0 以上 1 以下になる理由を説明できる。

確率は「起こりやすさ」を数で表す

結果を数えるところから始める

さいころを 1 回投げると、出る目は、

1, 2, 3, 4, 5, 6

のどれかです。

このように、ある試行を行ったときに起こりうる結果を整理すると、「ある結果がどのくらい起こりやすいか」を数で表せます。

確率を求めるときは、いきなり分数を作るのではなく、

1. 起こりうる結果をすべて確認する。
2. それぞれが同じ程度に起こりやすいか確認する。
3. 求めたい事象に当てはまる結果を数える。

という順に考えます。

確率でも数え上げが土台になる

確率の計算では、これまで学んだ場合の数を使います。

ただし、単に場合の数を比べればよいのではなく、まず根元事象が同様に確からしいことを確認する必要があります。

根元事象と標本空間

根元事象

1 回の試行で起こる、これ以上分けて考えない 1 つ 1 つの結果を**根元事象**といいます。
公正な 6 面さいころを 1 回投げるなら、
「1 の目が出る」「2 の目が出る」…「6 の目が出る」
のそれぞれが根元事象です。

標本空間

ある試行で起こりうるすべての根元事象を集めたものを**標本空間**といいます。
標本空間を Ω と表すことがあります。
公正な 6 面さいころを 1 回投げる場合は、

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

です。

全体を先に決める

確率を考えるときは、何を「起こりうるすべての結果」とするかを最初にはっきりさせます。
たとえば、公正なコインを 1 回投げるなら、

$$\Omega = \{\text{表}, \text{裏}\}$$

です。

この標本空間が、確率を考えるときの「全体」になります。

結果の区切り方をそろえる

標本空間には、同じ段階の結果を並べます。

たとえば、さいころ 1 回の結果として、

「1 の目」「2 の目」「偶数の目」

を並べるのは適切ではありません。

「偶数の目」は複数の根元事象をまとめたものだからです。

事象

事象

標本空間の根元事象のうち、ある条件を満たすものを集めたものを**事象**といいます。

公正な 6 面さいころを 1 回投げるとき、

「偶数の目が出る」という事象を A とすると、

$$A = \{2, 4, 6\}$$

です。

事象は複数の結果をまとめたもの

さいころを 1 回投げるとき、

- ・「3 の目が出る」
- ・「偶数の目が出る」
- ・「4 以上の目が出る」

はいずれも事象として考えられます。

たとえば「4 以上の目が出る」という事象に属する根元事象は、

$$4, 5, 6$$

の 3 つです。

確率を求めるときは、このように事象に属する根元事象を数えます。

同様に確からしい

同様に確からしい

いくつかの根元事象が、どれも同じ程度に起こると考えられるとき、それらは**同様に確からしい**といいます。

公正なさいころなら 6 つの目を同じように扱える

公正な 6 面さいころでは、どの面も同じように作られ、偏りがありません。

そのため、

$$1, 2, 3, 4, 5, 6$$

の 6 つの根元事象は同様に確からしいと考えます。

同様に、公正なコインなら「表」と「裏」は同様に確からしいと考えます。

場合の数の比を使える条件

確率を、

$$\frac{\text{条件を満たす場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}$$

で求めるためには、標本空間の根元事象が同様に確からしいことが必要です。

個数が同じでも起こりやすさが同じとは限らない

結果をいくつか並べられたからといって、いつでも場合の数の比で確率を求められるわけではありません。

この講では、公正なコイン・公正なさいころ・無作為に選ぶカードなど、根元事象を同様に確からしいとみなせる設定だけを扱います。

確率の基本的な定義

同様に確からしい場合の確率

標本空間 Ω のすべての根元事象が同様に確からしいとします。

事象 A に属する根元事象の数を $n(A)$ 、標本空間に含まれる根元事象の数を $n(\Omega)$ とすると、事象 A の確率は、

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

です。

分母は全体、分子は条件を満たすもの

公正な 6 面さいころを 1 回投げ、「偶数の目が出る」という事象 A を考えます。

標本空間は、

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

なので、

$$n(\Omega) = 6$$

です。

事象 A は、

$$A = \{2, 4, 6\}$$

なので、

$$n(A) = 3$$

です。

したがって、

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。

確率を求める 4 段階

1. 標本空間を確認する。
2. 根元事象が同様に確からしいことを確認する。
3. 求める事象に属する根元事象を数える。
4. 「事象の場合の数 ÷ 全体の場合の数」で求める。

確率は 0 以上 1 以下

分子は分母を超えない

事象 A に属する根元事象は、標本空間 Ω に含まれる根元事象の一部です。

したがって、

$$0 \leq n(A) \leq n(\Omega)$$

です。

これを $n(\Omega)$ で割ると、

$$0 \leq \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leq 1$$

なので、

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

となります。

確率は、起こりやすさを 0 から 1 までの数で表したものと考えられます。

確率の値の範囲

どの事象についても、確率は、

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

の範囲にあります。

計算結果が負の数になったり、1 より大きくなったりした場合は、数え方や式を見直します。

公正なコインの例

表が出る確率

公正なコインを 1 回投げます。

標本空間は、

$$\Omega = \{\text{表}, \text{裏}\}$$

で、2 つの根元事象は同様に確からしいものとします。

「表が出る」という事象 A に属する根元事象は 1 つです。

したがって、

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

です。

カードを 1 枚選ぶ例

番号カードから選ぶ

1, 2, 3, 4, 5 と書かれた 5 枚のカードから、1 枚を無作為に選びます。
5 枚のカードはどれも同様に選ばれやすいものとします。
「3 以上の番号を選ぶ」という事象を A とすると、

$$A = \{3, 4, 5\}$$

です。

全体は 5 通り、条件を満たすものは 3 通りなので、

$$P(A) = \frac{3}{5}$$

です。

組合せを使って場合の数を数える

2 枚を同時に選ぶ場合

A, B, C, D の異なる 4 枚のカードから 2 枚を無作為に選びます。
選ぶ順序を区別しないので、起こりうる結果は、

- A, B
- A, C
- A, D
- B, C
- B, D
- C, D

の 6 通りです。

これは、

$${}_4C_2 = 6$$

と求めても構いません。

ここで、「選んだ 2 枚の中に A がある」という事象を考えると、

- A, B
- A, C
- A, D

の 3 通りです。

6 通りの選び方が同様に確からしいので、確率は、

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。

組合せは、このように標本空間や事象の場合の数を数えるために必要なときだけ使います。

分母と分子で数え方をそろえる

分母では順序を区別せず、分子では順序を区別する、というように数え方を変えてはいけません。

標本空間と事象は、同じ基準で根元事象を数えます。

例題**例題 1**

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。
「5 以上の目が出る」という事象 A の確率を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

標本空間は、

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

で、6 つの根元事象は同様に確からしいと考えます。

事象 A は、

$$A = \{5, 6\}$$

なので、 $n(A) = 2$ です。

したがって、

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

です。

例題 2

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 と書かれた 8 枚のカードから 1 枚を無作為に選びます。
「3 の倍数が書かれたカードを選ぶ」という事象の確率を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

8 枚のカードは同様に選ばれやすいので、全体的場合の数は 8 です。

3 の倍数は、

$$3, 6$$

の 2 枚です。

したがって、求める確率は、

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

です。

例題 3

A, B, C, D, E の異なる 5 枚のカードから 2 枚を無作為に選びます。選ぶ順序は区別しません。「選んだ 2 枚の中に A が含まれる」という事象の確率を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

全体の選び方は、

$${}_5C_2 = 10$$

通りです。

この 10 通りは同様に確からしいと考えます。

A を含む選び方は、

- A, B
- A, C
- A, D
- A, E

の 4 通りです。

したがって、求める確率は、

$$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

です。

演習問題**練習問題 1**

公正なコインを 1 回投げます。
標本空間を答え、「裏が出る」という事象の確率を求めなさい。

練習問題 2

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。
「3 以下の目が出る」という事象の確率を求めなさい。

練習問題 3

公正な 6 面さいころを 1 回投げます。
「素数の目が出る」という事象の確率を求めなさい。

練習問題 4

1, 2, 3, 4, 5, 6 と書かれた 6 枚のカードから 1 枚を無作為に選びます。
「偶数が書かれたカードを選ぶ」という事象の確率を求めなさい。

練習問題 5

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 と書かれた 7 枚のカードから 1 枚を無作為に選びます。
「5 より大きい数が書かれたカードを選ぶ」という事象の確率を求めなさい。

練習問題 6

公正な 6 面さいころを 1 回投げるとき、
「偶数の目が出る」という事象 A について、次を答えなさい。

1. 標本空間 Ω
2. 事象 A
3. $n(\Omega)$
4. $n(A)$
5. $P(A)$

練習問題 7

A, B, C, D の異なる 4 枚のカードから 2 枚を無作為に選びます。順序は区別しません。
「 A と B のうち少なくとも 1 枚が選ばれる」という条件を満たす選び方をすべて列挙し、その確率を求めなさい。

練習問題 8

ある事象 A について、標本空間の根元事象が全部で 10 個あり、それらは同様に確からしいとします。
事象 A に属する根元事象が 7 個あるとき、 $P(A)$ を求めなさい。
また、その値が 0 以上 1 以下であることを確認しなさい。

練習問題 9

ある生徒は、公正な 6 面さいころを 1 回投げて「4 以上の目が出る」確率を、

$$\frac{4}{6}$$

としました。
この考えの誤りを説明し、正しい確率を求めなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

標本空間は、

$$\Omega = \{\text{表}, \text{裏}\}$$

です。

公正なコインなので、表と裏は同様に確からしいと考えます。

「裏が出る」という事象に属する根元事象は 1 つなので、確率は、

$$\frac{1}{2}$$

です。

練習問題 2 の解答・解説

標本空間には 6 つの根元事象があります。

3 以下の目は、

$$1, 2, 3$$

の 3 つです。

したがって、確率は、

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。

練習問題 3 の解答・解説

1 から 6 までのうち、素数は、

$$2, 3, 5$$

です。

条件を満たす根元事象は 3 個、全体は 6 個なので、

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。

練習問題 4 の解答・解説

偶数が書かれたカードは、

$$2, 4, 6$$

の 3 枚です。

全体は 6 枚で、どのカードも同様に選ばれやすいので、

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。

練習問題 5 の解答・解説

5 より大きい数は、

$$6, 7$$

の 2 つです。

全体は 7 通りなので、求める確率は、

$$\frac{2}{7}$$

です。

練習問題 6 の解答・解説

1. 標本空間は、

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

です。

1. 事象 A は、

$$A = \{2, 4, 6\}$$

です。

1. $n(\Omega) = 6$ です。

1. $n(A) = 3$ です。

1. したがって、

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。

練習問題 7 の解答・解説

4 枚から 2 枚を選ぶ全体の結果は、

- A, B
- A, C
- A, D
- B, C
- B, D
- C, D

の 6 通りです。

このうち、 A と B のうち少なくとも 1 枚が選ばれるものは、

- A, B
- A, C
- A, D
- B, C
- B, D

の 5 通りです。

6 通りの結果は同様に確からしいので、求める確率は、

$$\frac{5}{6}$$

です。

練習問題 8 の解答・解説

全体の根元事象は 10 個、事象 A に属する根元事象は 7 個なので、

$$P(A) = \frac{7}{10}$$

です。

また、

$$0 \leq \frac{7}{10} \leq 1$$

なので、確率の値の範囲に入っています。

練習問題 9 の解答・解説

「4 以上」という条件を満たす目は、4 個ではありません。

実際には、

$$4, 5, 6$$

の 3 つです。

したがって、条件を満たす場合の数は 3、全体的場合の数は 6 なので、

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

です。