第 230 講 直線をベクトルで表す

学習目標

- 直線上の点の位置ベクトルを、基準点と方向ベクトルを用いて表せる。
- パラメータの値と、直線上の点の位置との関係を説明できる。
- 異なる 2 点を通る直線をベクトルで表せる。
- 基準点や方向ベクトルを替えた、同じ直線の別の表示を作り、その同値性を説明できる。
- パラメータの範囲を用いて、直線・半直線・線分を表し分けられる。
- 与えられた点が直線上にあるかを、各成分に共通するパラメータで判定できる。

1. 基準点と方向ベクトル

直線のベクトル表示

点 A の位置ベクトルを $\vec{a}$ とし、$\vec{d} \neq \vec{0}$ とする。点 A を通り、$\vec{d}$ に平行な直線上の点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は、実数 t を用いて次のように表せる。

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

$\vec{d}$ を方向ベクトル、t をパラメータという。

式が直線を表す理由

点 P がこの直線上にあるなら、$\overrightarrow{AP}$ は $\vec{d}$ の実数倍である。したがって、ある実数 t によって $\overrightarrow{AP} = t\vec{d}$ と書ける。$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}$ であるから、$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ を得る。
逆に、$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ を満たす点では $\overrightarrow{AP} = t\vec{d}$ である。$t = 0$ なら $P = A$ であり、$t \neq 0$ なら $\overrightarrow{AP}$ は $\vec{d}$ に平行である。そのため、いずれの場合も P は A を通り $\vec{d}$ に平行な直線上にある。式は直線上の点を漏れなく表している。

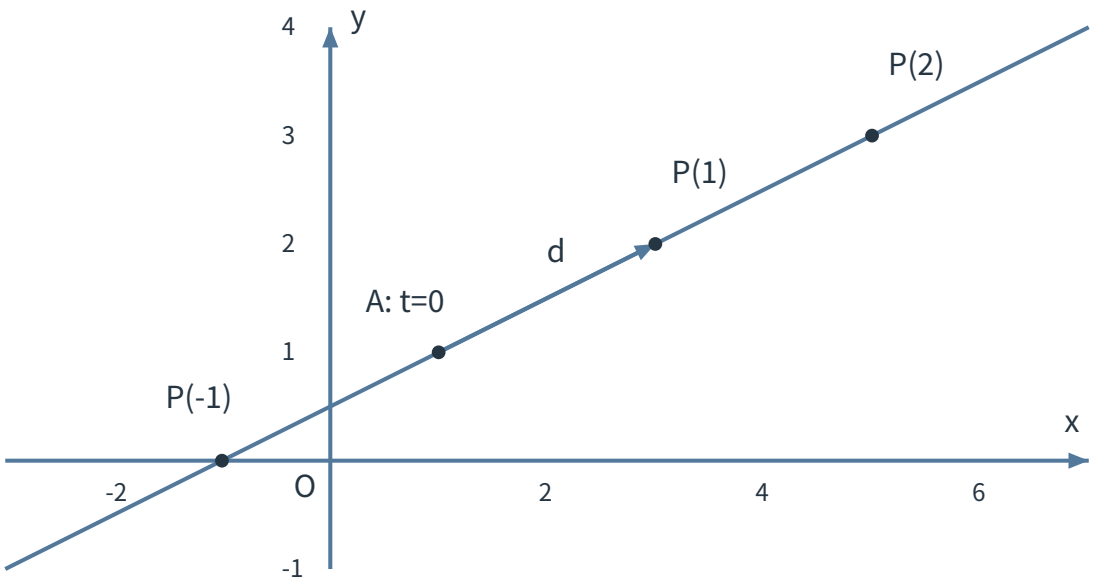

図 1　$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ で表される直線上の点

tは向きと移動量を表す

$t=0$ では $P=A$ である。$t>0$ では A から $\vec{d}$ と同じ向きへ進み、$t<0$ では反対向きへ進む。また、$AP=|\,t\,|\cdot|\,\vec{d}\,|$ であるから、$|\,t\,|$ は $\vec{d}$ を単位とした移動の倍率である。

方向ベクトルは零ベクトルではない

$\vec{d}=\vec{0}$ とすると、t を変えても $\vec{p}=\vec{a}$ のままであり、1 点しか表せない。直線を表すには $\vec{d}\neq\vec{0}$ が必要である。

例題 1：基準点と方向ベクトルから表す

点 $A(2,-1)$ を通り、$\vec{d}=(3,2)$ に平行な直線をベクトルで表せ。また、$t=-1$ に対応する点の座標を求めよ。

例題 1 の解答・解説

$\vec{a}=(2,-1)$ であるから、直線は

$$\vec{p}=(2,-1)+t(3,2)\qquad(t\in\mathbb{R})$$

と表せる。$t=-1$ のとき、$\vec{p}=(2,-1)-(3,2)=(-1,-3)$ である。したがって、対応する点は $(-1,-3)$ である。

2. 異なる 2 点を通る直線

2 点から方向ベクトルを作る

異なる 2 点 A,B の位置ベクトルを $\vec{a},\vec{b}$ とする。$A\neq B$ であるから、$\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ である。これを方向ベクトルに選ぶと、直線 AB は次のように表せる。

$$\vec{p}=\vec{a}+t\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\qquad(t\in\mathbb{R})$$

$t=0$ では $P=A$、$t=1$ では $P=B$ である。

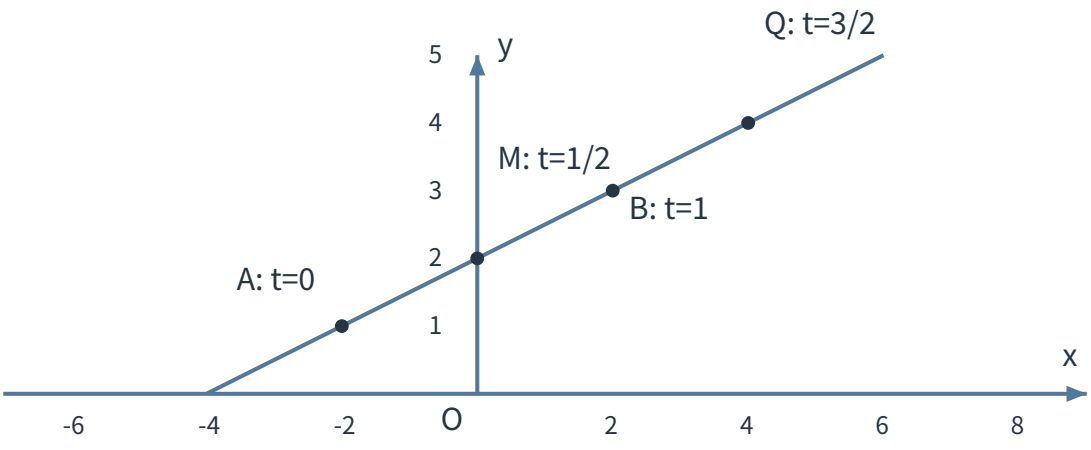

図 2　異なる 2 点A,Bを通る直線とパラメータ

例題 2：2 点を通る直線

点 $A(-1,2)$、$B(3,4)$ を通る直線をベクトルで表し、$t=\frac{3}{2}$ に対応する点の座標を求めよ。

例題 2 の解答・解説

$\vec{b}-\vec{a}=(3,4)-(-1,2)=(4,2)$ であるから、直線は

$$\vec{p}=(-1,2)+t(4,2)\qquad(t\in\mathbb{R})$$

と表せる。$t=\frac{3}{2}$ のとき、$\vec{p}=(-1,2)+\frac{3}{2}(4,2)=(5,5)$ である。

方向ベクトルと基準点は 1 通りではない

$k\neq 0$ のとき、$\vec{d}$ の代わりに $k\vec{d}$ を用いても同じ直線を表せる。新しいパラメータを u とすると、$t=ku$ と対応するからである。$k>0$ では向きが同じであり、$k<0$ では向きが反対になる。
また、同じ直線上の点 A' を基準点にしてよい。$\vec{a}'=\vec{a}+s\vec{d}$ なら、

$$\vec{a}'+u\vec{d}=\vec{a}+(s+u)\vec{d}$$

であるから、パラメータをずらすだけで同じ点全体を表せる。

3. パラメータの範囲

直線・半直線・線分を表し分ける

異なる 2 点 A,B に対して $\vec{p}=\vec{a}+t\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$ とする。t の範囲を変えると、表す点の範囲も変わる。
- $t\in\mathbb{R}$：直線 AB
- $t\geq 0$：点 A を始点として B の向きへ進む半直線
- $0\leq t\leq 1$：線分 AB

$0<t<1$ では P は A,B の間にあり、$t<0$ または $t>1$ では線分 AB の外側にある。



図 3　$0\leq t\leq 1$で表される線分AB

例題 3：点が直線上にあるか判定する

直線 l が $\vec{p}=(1,-1)+t(2,3)$ で表されている。点 $C(5,5)$ と点 $D(5,4)$ がそれぞれ l 上にあるか判定せよ。

例題 3 の解答・解説

点 C について、x 成分から $1+2t=5$ より $t=2$ である。y 成分でも $-1+3t=5$ より $t=2$ となる。共通の t があるため、C は l 上にある。
点 D について、x 成分からは $t=2$ であるが、y 成分からは $-1+3t=4$ より $t=\frac{5}{3}$ である。共通の t がないため、D は l 上にない。

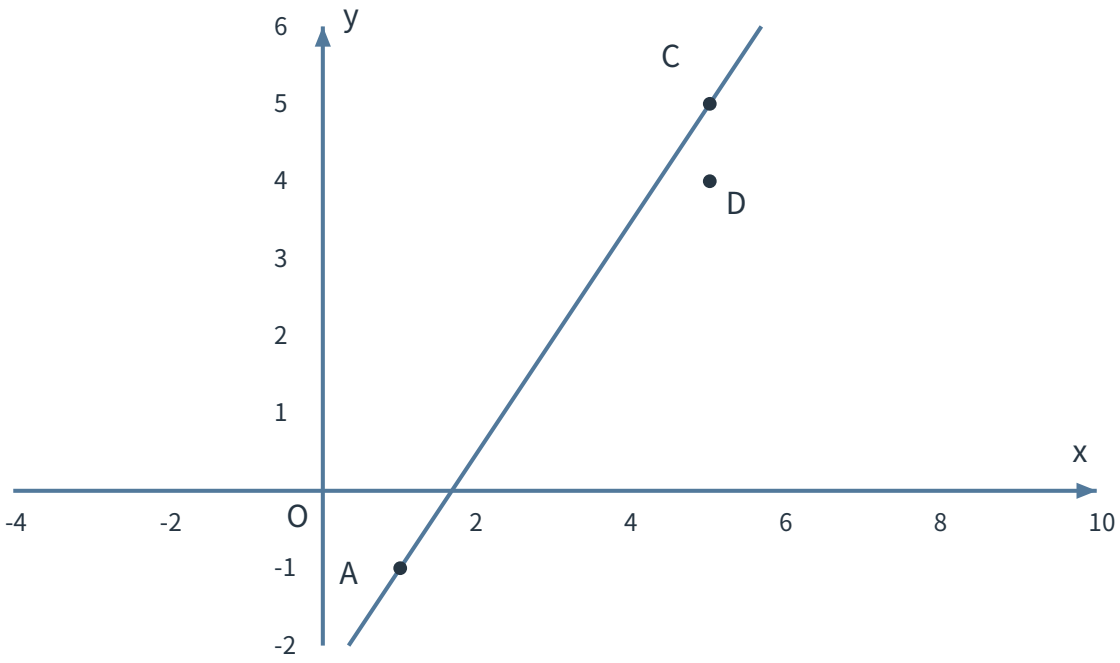

図 4　直線上の点Cと直線上にない点D

方向ベクトルに 0 の成分があるとき

例えば $\vec{p}=(1,2)+t(0,3)$ では、すべての点の x 座標が 1 である。x 成分の式 $1+0t=x$ から t を求めようとして 0 で割ってはいけない。まず $x=1$ を確認し、0 でない成分から t を求める。

例題 4：線分と半直線を表す

点 $A(0,1)$、$B(4,3)$ に対し、線分 AB と、A を始点として B の向きへ進む半直線をそれぞれベクトルで表せ。

例題 4 の解答・解説

$\vec{b}-\vec{a}=(4,2)$ である。線分 AB は

$$\vec{p}=(0,1)+t(4,2) \qquad (0\leq t\leq 1)$$

と表せる。半直線は同じ式で、範囲を $t\geq 0$ とすればよい。

4. 演習問題

演習 1：直線のベクトル表示

点 $A(-2,3)$ を通り、$\vec{d}=(1,-4)$ に平行な直線をベクトルで表せ。

演習 2：パラメータと点

$\vec{p}=(3,1)+t(-2,5)$ において、$t=-2$ に対応する点の座標を求めよ。

演習 3：2 点を通る直線

異なる 2 点 $A(2,-3)$、$B(-1,3)$ を通る直線を、A を基準点としてベクトルで表せ。

演習 4：方向ベクトルの非零倍

$\vec{p}=(1,2)+t(2,-1)$ が表す直線を、方向ベクトル $(-4,2)$ を用いて表せ。また、2 つの方向ベクトルの向きを比較せよ。

演習 5：点の所属判定

直線 l が $\vec{p}=(-1,2)+t(3,-2)$ で表されている。点 $E(5,-2)$ と点 $F(8,-3)$ がそれぞれ l 上にあるか判定せよ。

演習 6：0 の成分を含む方向ベクトル

直線 m が $\vec{p}=(2,-1)+t(0,4)$ で表されている。点 $G(2,7)$ と点 $H(3,7)$ がそれぞれ m 上にあるか判定せよ。

演習 7：パラメータの範囲

点 $A(-2,0)$、$B(4,3)$ に対し、線分 AB と、A を始点として B の向きへ進む半直線をベクトルで表せ。

演習 8：基準点を替えた表示

直線 l が $\vec{p}=(1,0)+t(2,3)$ で表されている。l 上の点 $B(5,6)$ を基準点とし、方向ベクトルを $(-2,-3)$ とする別の表示を作れ。また、2 つの表示が同じ直線を表す理由を説明せよ。

5. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

直線は $\vec{p}=(-2,3)+t(1,-4)$（$t\in\mathbb{R}$）と表せる。

演習 2 の解答・解説

$t=-2$ を代入すると、$\vec{p}=(3,1)-2(-2,5)=(7,-9)$ である。

演習 3 の解答・解説

$\vec{b}-\vec{a}=(-1,3)-(2,-3)=(-3,6)$ である。したがって、直線は $\vec{p}=(2,-3)+t(-3,6)$（$t\in\mathbb{R}$）と表せる。

演習 4 の解答・解説

$(-4,2)=-2(2,-1)$ であるから、これは元の方向ベクトルの非零倍である。したがって、$\vec{p}=(1,2)+u(-4,2)$（$u\in\mathbb{R}$）と表せる。倍率が負であるため、2 つの方向ベクトルの向きは反対である。

演習 5 の解答・解説

E では $-1+3t=5$ より $t=2$ であり、$2-2t=-2$ も満たす。したがって、E は l 上にある。
F では $-1+3t=8$ より $t=3$ であるが、$2-2t=-4\neq-3$ である。したがって、F は l 上にない。

演習 6 の解答・解説

G の x 座標は 2 であり、$-1+4t=7$ より $t=2$ が存在する。したがって、G は m 上にある。
H の x 座標は 3 である。直線 m 上では常に $x=2$ であるため、H は m 上にない。

演習 7 の解答・解説

$\vec{b}-\vec{a}=(6,3)$ である。線分 AB は $\vec{p}=(-2,0)+t(6,3)$（$0\leq t\leq 1$）と表せる。半直線は同じ式で $t\geq 0$ とすればよい。

演習 8 の解答・解説

$B=(1,0)+2(2,3)$ であるから、B は l 上にある。別の表示は

$$\vec{p}=(5,6)+u(-2,-3)\qquad(u\in\mathbb{R})$$

である。実際、右辺は $(1,0)+(2-u)(2,3)$ と変形できる。u がすべての実数を動くとき $2-u$ もすべての実数を動くため、2 つの表示は同じ点全体を表す。