

第 134 講 定積分

学習目標

定積分について、次のことができるようになることを目標とする。

- ・ 定積分が、固定した上下端における原始関数の値の差として定まる数であることを理解する。
- ・ 不定積分と定積分の違いを説明し、定積分では答えに $+C$ を付けない理由を理解する。
- ・ 積分記号、下端、上端、被積分関数、 dx 、評価記号 $[F(x)]_a^b$ の意味を読み取る。
- ・ 多項式の定積分を、原始関数を求めて端点で評価する手順で計算できる。

定積分の定義

多項式 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とする。つまり、 $F'(x) = f(x)$ であるとする。

a, b を実定数とすると、定積分は次のように定める。

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

ここで、 a は下端、 b は上端、 $f(x)$ は被積分関数、 dx は x について積分することを表す。

また、評価括弧 $[F(x)]_a^b$ は、原始関数 $F(x)$ の上端での値から下端での値を引くことを略記したものである。

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

上端 b と下端 a の大小関係は問わない。 $a > b$ の場合でも、この定義によって定積分の値は定まる。

定積分の考え方

第 133 講までで学んだ不定積分は、微分すると $f(x)$ になる関数をすべて求めるものであった。

例えば、 $f(x) = 2x$ の原始関数は

$$F(x) = x^2 + C$$

である。

ここでの C はどの値でもよいから、不定積分の答えは 1 つの関数ではなく、関数の集まりである。

一方、定積分では積分する区間の下端 a と上端 b を固定する。すると、原始関数の 2 つの位置での値の差だけを見るため、定積分の値は 1 つの数になる。

原始関数を $F(x) + C$ と選んでも、

$$(F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

となり、 C は打ち消される。

したがって、定積分の値は原始関数の選び方に依存しない。

定積分を計算する手順

定積分 $\int_a^b f(x) dx$ を計算するときは、次の流れで考える。

1. 被積分関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を求める。
2. 上端 b を原始関数へ代入して $F(b)$ を求める。
3. 下端 a を原始関数へ代入して $F(a)$ を求める。
4. 上端での値から下端での値を引く。

つまり、

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

定積分で間違いやすい点

定積分では、被積分関数そのものへ端点を代入するのではない。

例えば、

$$\int_a^b f(x) dx$$

では、 $f(b) - f(a)$ を計算するのではなく、原始関数 $F(x)$ を使って

$$F(b) - F(a)$$

を計算する。

また、定積分の答えには不定積分のような $+C$ を付けない。固定した上下端で値が決まる数だからである。

積分記号

$$\int_a^b f(x) dx$$

では、 a が下端、 b が上端であり、上端は単に積分記号の上側に書かれる数を表す。数の大小を表す言葉ではないため、 $a > b$ の場合も定義できる。

定積分の基本的な性質

定積分の性質は、原始関数の値の差として考えると確認できる。

まず、上下端が同じ場合は、

$$\int_a^a f(x) dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

となる。

また、上下端を逆にすると、

$$\begin{aligned}\int_b^a f(x) dx &= [F(x)]_b^a \\ &= F(a) - F(b) \\ &= -(F(b) - F(a)) \\ &= -\int_a^b f(x) dx\end{aligned}$$

となり、値の符号が反転する。

区間を分ける性質も、原始関数の値の差から分かる。 c を実定数とすると、

$$\begin{aligned}[F(x)]_a^c + [F(x)]_c^b &= (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

が成立する。

この性質は、 a, b, c の順序によらず、多項式の定積分で成立する。

さらに、 $F'(x) = f(x)$ 、 $G'(x) = g(x)$ とすると、 p, q を実定数として、

$$(pF(x) + qG(x))' = pf(x) + qg(x)$$

であるため、 $pF + qG$ は $pf + qg$ の原始関数になる。

そのため、定積分では同じ上下端における和や定数倍について、

$$\int_a^b (pf(x) + qg(x)) dx = p \int_a^b f(x) dx + q \int_a^b g(x) dx$$

が成り立つ。

定積分の値は負になることもある。したがって、定積分は常に正の面積そのものを表すわけではない。

例題 1

次の定積分を求めなさい。

$$\int_0^2 (2x + 1) dx$$

例題 1 の解答・解説

被積分関数 $2x + 1$ の原始関数を求める。

$$F(x) = x^2 + x$$

である。

確認すると、

$$F'(x) = 2x + 1$$

となり、確かに原始関数である。

したがって、上端 2 と下端 0 での値を求める。

$$F(2) = 2^2 + 2 = 6$$

$$F(0) = 0^2 + 0 = 0$$

よって、定積分は上端での値から下端での値を引いて、

$$\int_0^2 (2x + 1) dx = F(2) - F(0) = 6 - 0 = 6$$

である。

定積分では、 $2x + 1$ に直接端点を代入するのではなく、原始関数 $x^2 + x$ の値の差を求めることがポイントである。

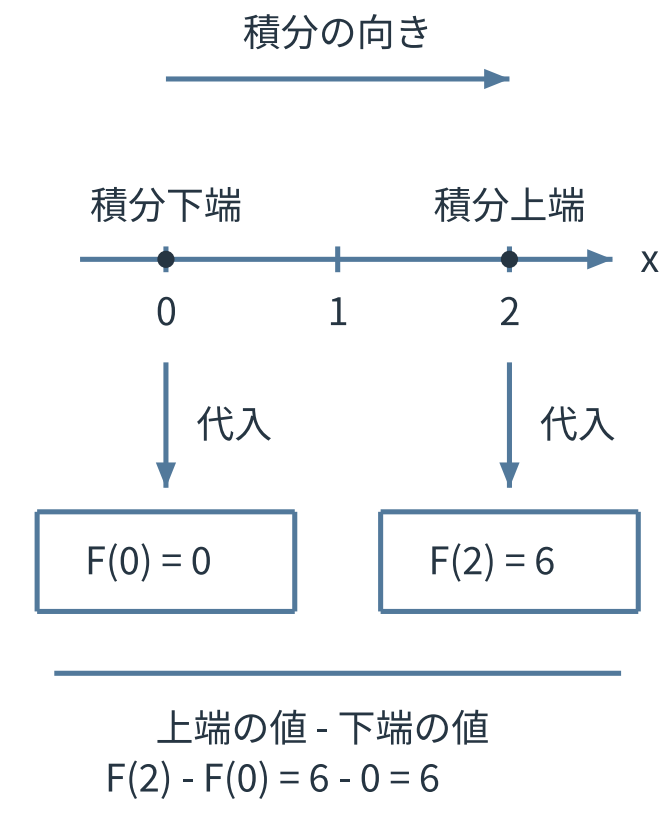


図 1 $\int_0^2 (2x + 1) dx = 6$ を、原始関数 $F(x) = x^2 + x$ の端の値で求める。上段は右に増える x の数直線である。下段の枠は値の対応一覧であり、高さや面積を表さない。上端の値から下端の値を引く。 $F(x) + C$ を使っても $(6 + C) - (0 + C) = 6$ となり、定数 C は差で消える。

例題 2

次の定積分を求めなさい。

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 2x) dx$$

例題 2 の解答・解説

被積分関数 $x^2 + 2x$ の原始関数を求める。

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$$

である。

確認すると、

$$F'(x) = x^2 + 2x$$

となり、確かに原始関数である。

したがって、

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 2x) dx = [F(x)]_{-1}^1$$

である。

上端 1 での値は、

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{1^3}{3} + 1^2 \\ &= \frac{1}{3} + 1 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。

下端 -1 での値は、負の端点全体を括弧付きで代入する。

$$\begin{aligned} F(-1) &= \frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 \\ &= -\frac{1}{3} + 1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^2 + 2x) dx &= F(1) - F(-1) \\ &= \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。

負の端点では、端点の値をそのまま符号だけ変えるのではなく、原始関数全体へ括弧付きで代入することが重要である。

例題 3

次の定積分を求めなさい。

$$\int_2^{-1} 2x \, dx$$

例題 3 の解答・解説

被積分関数 $2x$ の原始関数を求める。

$$F(x) = x^2$$

である。
確認すると、

$$F'(x) = 2x$$

となり、確かに原始関数である。

この定積分では、上端は -1 、下端は 2 である。上端・下端は数の大小ではなく、積分記号の位置で決まる。

したがって、

$$\int_2^{-1} 2x \, dx = [F(x)]_2^{-1}$$

である。
上端での値は、

$$\begin{aligned} F(-1) &= (-1)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

下端での値は、

$$\begin{aligned} F(2) &= 2^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

となる。
よって、

$$\begin{aligned} \int_2^{-1} 2x \, dx &= F(-1) - F(2) \\ &= 1 - 4 \\ &= -3 \end{aligned}$$

である。
逆方向に積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 2x \, dx &= F(2) - F(-1) \\ &= 4 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

となり、上下端を逆にすると符号が反転することが確認できる。

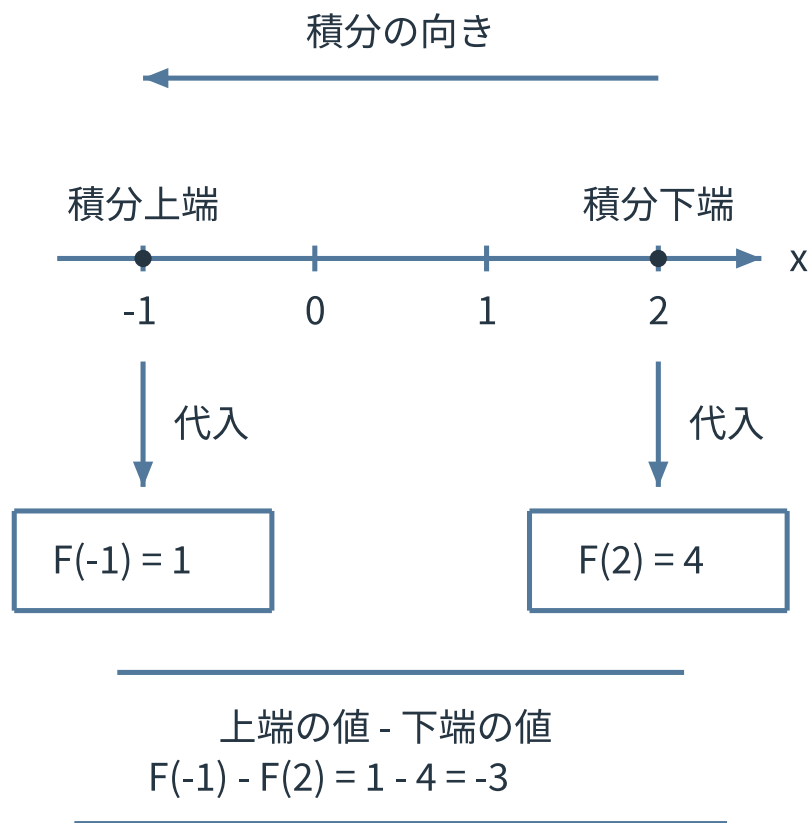


図 2 $\int_2^{-1} 2x \, dx = -3$ を、原始関数 $F(x) = x^2$ の端の値で求める。数直線は右に増えるが、積分下端は 2、積分上端は -1 であり、上の矢印は 2 から -1 へ向く。下段は値の対応一覧である。 $F(-1) - F(2) = 1 - 4 = -3$ と計算する。 $(1 + C) - (4 + C) = -3$ であり、定数 C は差で消える。

練習問題 1

次の定積分を求めなさい。

$$\int_1^3 (3x^2 - 2x + 1) \, dx$$

練習問題 2

次の定積分を求めなさい。

$$\int_{-2}^0 (x^2 - 4x) \, dx$$

練習問題 3

次の定積分を求めなさい。

$$\int_3^1 4x^3 \, dx$$

練習問題 4

次の定積分を求めなさい。

$$\int_2^2 (x^3 + 2x) dx$$

練習問題 5

次の定積分を求めなさい。

$$\int_0^2 (x + 1) dx$$

ただし、原始関数を $F(x) + 5$ としても同じ値になることを確認しなさい。

練習問題 6

次の定積分を求めなさい。

$$\int_{-1}^2 (2x + 3) dx$$

また、次の誤った計算について、どこが間違いか説明しなさい。

$$(2 \cdot 2 + 3) - (2 \cdot (-1) + 3) = 6$$

この計算が定積分の値にならない理由を説明しなさい。

練習問題 7

次の定積分を、区間を分けて計算しなさい。

$$\int_0^3 2x dx$$

ただし、0 から 1、1 から 3 に分けて考えなさい。

練習問題 8

次の定積分を求めなさい。

$$\int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx$$

原始関数を求めた後、負の端点への代入に注意して計算しなさい。

練習問題 1 の解答・解説

被積分関数 $3x^2 - 2x + 1$ の原始関数を求める。

$$F(x) = x^3 - x^2 + x$$

である。

確認すると、 $F'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ となる。

したがって、

$$\int_1^3 (3x^2 - 2x + 1) dx = [F(x)]_1^3$$

より、

$$\begin{aligned} F(3) - F(1) &= (27 - 9 + 3) - (1 - 1 + 1) \\ &= 21 - 1 \\ &= 20 \end{aligned}$$

である。

定積分では、上端 3 での値から下端 1 での値を引くことに注意する。

練習問題 2 の解答・解説

被積分関数 $x^2 - 4x$ の原始関数を求める。

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2$$

である。

確認すると、 $F'(x) = x^2 - 4x$ となる。

したがって、

$$\int_{-2}^0 (x^2 - 4x) dx = [F(x)]_{-2}^0$$

である。

負の端点を含むため、括弧を付けて代入する。

$$\begin{aligned} F(0) - F(-2) &= 0 - \left(\frac{(-2)^3}{3} - 2(-2)^2 \right) \\ &= 0 - \left(-\frac{8}{3} - 8 \right) \\ &= 0 + \frac{32}{3} \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

である。

負の値を代入するときは、奇数乗の符号変化に注意する。

練習問題 3 の解答・解説

被積分関数 $4x^3$ の原始関数を求める。

$$F(x) = x^4$$

である。

確認すると、 $F'(x) = 4x^3$ となる。

上端は 1、下端は 3 である。したがって、

$$\int_3^1 4x^3 dx = [F(x)]_3^1$$

より、

$$\begin{aligned} F(1) - F(3) &= 1^4 - 3^4 \\ &= 1 - 81 \\ &= -80 \end{aligned}$$

である。

上下端を逆にすると、定積分の値の符号が反転する。下端の方が大きい場合でも、上端での値から下端での値を引く。

練習問題 4 の解答・解説

被積分関数 $x^3 + 2x$ の原始関数を求める。

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + x^2$$

である。

確認すると、 $F'(x) = x^3 + 2x$ となる。

したがって、

$$\int_2^2 (x^3 + 2x) dx = [F(x)]_2^2$$

である。

$$F(2) - F(2) = 0$$

となるため、答えは 0 である。

同じ上下端では、原始関数の同じ値の差になるため、必ず 0 になる。

練習問題 5 の解答・解説

被積分関数 $x + 1$ の原始関数を求める。

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x$$

である。

確認すると、 $F'(x) = x + 1$ となる。

したがって、

$$\int_0^2 (x + 1) dx = [F(x)]_0^2$$

より、

$$\begin{aligned} F(2) - F(0) &= \left(\frac{2^2}{2} + 2 \right) - 0 \\ &= 4 \end{aligned}$$

である。

ここで、別の原始関数

$$G(x) = F(x) + 5$$

を選んでも、

$$\begin{aligned} G(2) - G(0) &= (F(2) + 5) - (F(0) + 5) \\ &= F(2) - F(0) \end{aligned}$$

となる。

原始関数に含まれる定数は、上端と下端の差を取ると相殺される。

練習問題 6 の解答・解説

被積分関数 $2x + 3$ の原始関数を求める。

$$F(x) = x^2 + 3x$$

である。

確認すると、

$$F'(x) = 2x + 3$$

となり、確かに原始関数である。

したがって、

$$\int_{-1}^2 (2x + 3) dx = [F(x)]_{-1}^2$$

である。

上端 2 での値は、

$$\begin{aligned} F(2) &= 2^2 + 3 \cdot 2 \\ &= 4 + 6 \\ &= 10 \end{aligned}$$

となる。

下端 -1 での値は、

$$\begin{aligned} F(-1) &= (-1)^2 + 3(-1) \\ &= 1 - 3 \\ &= -2 \end{aligned}$$

である。
したがって、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (2x + 3) dx &= F(2) - F(-1) \\ &= 10 - (-2) \\ &= 12 \end{aligned}$$

である。
誤った計算では、被積分関数 $2x + 3$ に端点を直接代入している。
実際に、

$$\begin{aligned} (2 \cdot 2 + 3) - (2 \cdot (-1) + 3) &= 7 - 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

となるが、これは $f(2) - f(-1)$ を求めた値であり、定積分の値ではない。
定積分では、被積分関数ではなく原始関数の値の差

$$F(2) - F(-1)$$

を求める必要がある。したがって、正しい値は 12 である。

練習問題 7 の解答・解説

被積分関数 $2x$ の原始関数を求める。

$$F(x) = x^2$$

である。

まず区間を分ける。

$$\int_0^3 2x \, dx = \int_0^1 2x \, dx + \int_1^3 2x \, dx$$

それぞれ計算する。

$$\begin{aligned} \int_0^1 2x \, dx &= [x^2]_0^1 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 2x \, dx &= [x^2]_1^3 \\ &= 9 - 1 \\ &= 8 \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \int_0^3 2x \, dx &= 1 + 8 \\ &= 9 \end{aligned}$$

である。

区間を分けても、それぞれの原始関数の値の差を足すことで全体の差と一致する。

練習問題 8 の解答・解説

被積分関数 $x^2 + 1$ の原始関数を求める。

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x$$

である。

確認すると、 $F'(x) = x^2 + 1$ となる。

したがって、

$$\int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx = [F(x)]_{-2}^1$$

である。

負の端点を括弧付きで代入する。

$$\begin{aligned} F(1) - F(-2) &= \left(\frac{1^3}{3} + 1 \right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} + (-2) \right) \\ &= \frac{4}{3} - \left(-\frac{8}{3} - 2 \right) \\ &= \frac{4}{3} + \frac{14}{3} \\ &= 6 \end{aligned}$$

である。

負の端点では、端点全体を原始関数へ代入し、その後に上端の値から下端の値を引くことが重要である。