

第 20 講 三角比の相互関係

学習目標

- $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ が同じ直角三角形の辺の比から生まれることを説明できる。
- $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ を使って、2 つの三角比から残りの三角比を求められる。
- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を三平方の定理から説明できる。
- 三角比の相互関係を使い、1 つの三角比からほかの三角比を求められる。

3 つの三角比は別々のものではない

同じ 3 辺から 3 つの比が生まれる

直角三角形 ABC で、 $\angle C = 90^\circ$ 、 $\angle A = \theta$ とします。

角 θ の向かい側の辺を a 、となりの辺を b 、斜辺を c とします。

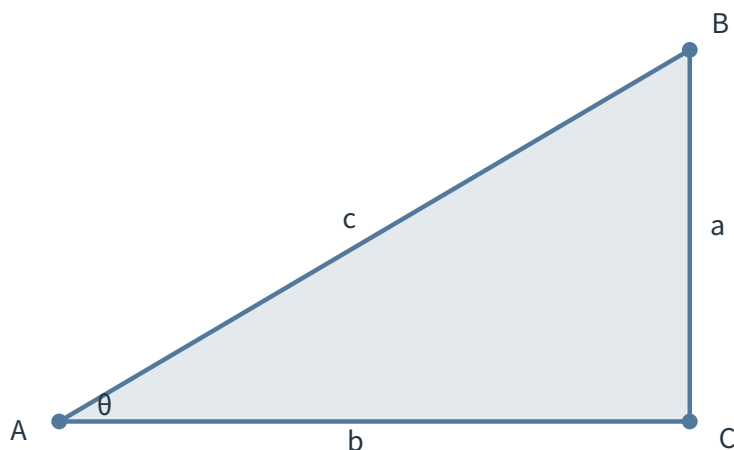


図 1 角 θ に対する 3 辺 a, b, c

定義から、 $\sin \theta = \frac{a}{c}$ 、 $\cos \theta = \frac{b}{c}$ 、 $\tan \theta = \frac{a}{b}$ です。

3 つの三角比は別々に作られた公式ではありません。同じ 3 本の辺を、異なる組合せで割ったものです。

そのため、1 つまたは 2 つの三角比が分かると、残りの三角比にも関係が生まれます。この関係を三角比の相互関係といいます。

$\tan \theta$ は $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の比

分数どうしを割ってみる

$\sin \theta = \frac{a}{c}$ 、 $\cos \theta = \frac{b}{c}$ なので、 $\sin \theta$ を $\cos \theta$ で割ると、まず、定義を代入すると、

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{a}{c} \div \frac{b}{c}$$

です。分数の割り算を掛け算へ直すと、

$$\frac{a}{c} \div \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b}$$

となります。約分すると、

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b}$$

となります。

$\frac{a}{b}$ は $\tan \theta$ そのものです。

したがって、

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

が成り立ちます。

正弦・余弦・正接の関係

直角三角形の鋭角 θ について、

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

が成り立ちます。

$\sin \theta$ と $\cos \theta$ が分かれば、 $\tan \theta$ を求められます。

特別な角でも確かめられる

$\theta = 30^\circ$ のとき、 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 、 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ です。

したがって、

$$\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

となり、確かに $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ と一致します。

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ は三平方の定理から出る

辺の比を 2 乗して足す

同じ直角三角形で、三平方の定理から、

$$a^2 + b^2 = c^2$$

です。

両辺を c^2 で割ると、

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

となります。

ここで、 $\frac{a}{c} = \sin \theta$ 、 $\frac{b}{c} = \cos \theta$ なので、

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

が得られます。

この式は暗記だけで覚えるものではなく、三平方の定理を辺の比へ直したものです。

三角比の基本的な相互関係

直角三角形の鋭角 θ について、

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

が成り立ちます。

したがって、 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ のどちらか一方が分かれば、もう一方を求める手掛かりになります。

$\sin^2 \theta$ の意味

$\sin^2 \theta$ は、 $(\sin \theta)^2$ を表します。

$\sin(\theta^2)$ という意味ではありません。

同じように、 $\cos^2 \theta = (\cos \theta)^2$ です。

1 + tan² θ の関係

三平方の定理を別の辺で割る

三平方の定理 $a^2 + b^2 = c^2$ の両辺を b^2 で割ると、

$$\frac{a^2}{b^2} + 1 = \frac{c^2}{b^2}$$

となります。

$\frac{a}{b} = \tan \theta$ なので、左辺の最初の項は $\tan^2 \theta$ です。

また、 $\cos \theta = \frac{b}{c}$ なので、 $\frac{c}{b} = \frac{1}{\cos \theta}$ です。

したがって、

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

が成り立ちます。

3 つの相互関係

直角三角形の鋭角 θ について、次の関係が成り立ちます。

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

L01 では、まず最初の 2 つを確実に使えるようにし、3 つ目は $\tan \theta$ と $\cos \theta$ を直接結びつけたときに使います。

1 つの三角比から別の三角比を求める

式だけでなく三角形を復元する方法もある

鋭角 θ について $\sin \theta = \frac{3}{5}$ とします。

正弦は「向かい側 ÷ 斜辺」なので、向かい側の辺を 3、斜辺を 5 とする直角三角形を考えられます。となりの辺を b とすると、三平方の定理から $3^2 + b^2 = 5^2$ なので、 $b = 4$ です。

したがって、 $\cos \theta = \frac{4}{5}$ 、 $\tan \theta = \frac{3}{4}$ となります。

同じことは $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を使っても求められます。

L01 では、辺の比が見えやすい分数なら三角形を復元する方法、式が扱いやすいなら相互関係を使う方法のどちらでも構いません。

鋭角では三角比は正になる

この講では、直角三角形の鋭角 θ を扱います。

したがって、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ はすべて正です。

たとえば $\cos^2 \theta = \frac{16}{25}$ から $\cos \theta$ を求めるとき、この講では $\cos \theta = \frac{4}{5}$ とします。

鈍角まで三角比を広げたときの符号は、後の講で扱います。

例題

例題 1

$\sin \theta = \frac{3}{5}$ 、 $\cos \theta = \frac{4}{5}$ のとき、 $\tan \theta$ を求めなさい。ただし、 θ は鋭角とします。

例題 1 の解答・解説

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ を使います。

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

したがって、 $\tan \theta = \frac{3}{4}$ です。

例題 2

$\sin \theta = \frac{5}{13}$ のとき、 $\cos \theta$ と $\tan \theta$ を求めなさい。ただし、 θ は鋭角とします。

例題 2 の解答・解説

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を使います。

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$$

θ は鋭角なので $\cos \theta > 0$ です。したがって、 $\cos \theta = \frac{12}{13}$ です。

さらに、

$$\tan \theta = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

です。

よって、 $\cos \theta = \frac{12}{13}$ 、 $\tan \theta = \frac{5}{12}$ です。

例題 3

$\tan \theta = \frac{3}{4}$ のとき、 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ を求めなさい。ただし、 θ は鋭角とします。

例題 3 の解答・解説

$\tan \theta = \frac{3}{4}$ は、「向かい側の辺：となりの辺」が $3:4$ であることを表します。
 向かい側を 3、となりを 4 とすると、三平方の定理から斜辺は 5 です。
 したがって、 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ 、 $\cos \theta = \frac{4}{5}$ です。

演習問題**練習問題 1**

次の値を求めなさい。

- (1) $\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}$
- (2) $\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}$
- (3) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$

練習問題 2

$\sin \theta = \frac{8}{17}$ 、 $\cos \theta = \frac{15}{17}$ のとき、 $\tan \theta$ を求めなさい。ただし、 θ は鋭角とします。

練習問題 3

$\sin \theta = \frac{7}{25}$ のとき、 $\cos \theta$ と $\tan \theta$ を求めなさい。ただし、 θ は鋭角とします。

練習問題 4

$\cos \theta = \frac{5}{13}$ のとき、 $\sin \theta$ と $\tan \theta$ を求めなさい。ただし、 θ は鋭角とします。

練習問題 5

$\tan \theta = \frac{5}{12}$ のとき、 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ を求めなさい。ただし、 θ は鋭角とします。

練習問題 6

$\tan \theta = \frac{3}{4}$ のとき、

$$1 + \tan^2 \theta$$

と

$$\frac{1}{\cos^2 \theta}$$

の値をそれぞれ求め、等しいことを確かめなさい。ただし、 θ は鋭角とします。

練習問題 7

ある生徒は、 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ から $\cos \theta = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ と求めました。
この計算が誤っている理由を説明し、正しい $\cos \theta$ を求めなさい。ただし、 θ は鋭角とします。

練習問題 8

次のうち、直角三角形の鋭角 θ について常に成り立つものをすべて選べなさい。

- (ア) $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
- (イ) $\sin \theta + \cos \theta = 1$
- (ウ) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- (エ) $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

- (1) $\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1$ です。これは $\tan 45^\circ$ と一致します。
 (2) $\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ です。これは $\tan 60^\circ$ と一致します。
 (3) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 、 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ なので、

$$\sin^{230^\circ} + \cos^{230^\circ} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

です。

練習問題 2 の解答・解説

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ を使います。

$$\tan \theta = \frac{\frac{8}{17}}{\frac{15}{17}} = \frac{8}{15}$$

したがって、 $\tan \theta = \frac{8}{15}$ です。

練習問題 3 の解答・解説

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より、

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}$$

です。

θ は鋭角なので、 $\cos \theta = \frac{24}{25}$ です。

さらに、 $\tan \theta = \frac{7}{24}$ です。

練習問題 4 の解答・解説

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より、

$$\sin^2 \theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

です。

θ は鋭角なので、 $\sin \theta = \frac{12}{13}$ です。

したがって、 $\tan \theta = \frac{12}{5}$ です。

練習問題 5 の解答・解説

$\tan \theta = \frac{5}{12}$ なので、向かい側の辺を 5、となりの辺を 12 と考えます。

三平方の定理から斜辺は 13 です。

したがって、 $\sin \theta = \frac{5}{13}$ 、 $\cos \theta = \frac{12}{13}$ です。

練習問題 6 の解答・解説

$\tan \theta = \frac{3}{4}$ なので、

$$1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

です。

辺の比を 3 : 4 : 5 と考えると、 $\cos \theta = \frac{4}{5}$ です。

したがって、

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\frac{16}{25}} = \frac{25}{16}$$

です。

よって、2 つの値は等しくなります。

練習問題 7 の解答・解説

成り立つ関係は $\sin \theta + \cos \theta = 1$ ではなく、

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

です。

$\sin \theta = \frac{3}{5}$ なので、

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

です。

θ は鋭角なので、 $\cos \theta = \frac{4}{5}$ です。

練習問題 8 の解答・解説

(ア) は正しいです。 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ が成り立ちます。

(イ) は誤りです。一般に $\sin \theta + \cos \theta = 1$ とはなりません。

(ウ) は正しいです。三平方の定理から $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ が成り立ちます。

(エ) は正しいです。三平方の定理を辺の比で表すことで得られます。

したがって、正しいものは (ア)、(ウ)、(エ) です。