第 039 講 円運動の力の図

この講でできるようになること

- 円運動する物体を一つ選び、その物体に実際に働く力を正しい向きで描ける。
- 円の中心向きを正として、実在する力の半径方向成分から運動方程式を立てられる。
- 円錐振り子や鉛直面内の円運動で、重力・張力・垂直抗力・摩擦の役割を区別できる。
- 求めた張力や垂直抗力が負にならないかを確認し、仮定した円運動が成立するか判断できる。

円運動に必要な力はどこから生まれるか

糸につないだ小球を回すと、小球は円を描いて動く。糸が突然切れた場合、小球は円に沿って曲がり続けるのではなく、切れた瞬間の速度の向きに進もうとする。

円運動では、速度の向きが変わり続ける。そのためには、物体に円の中心向きの加速度が必要である。

第 038 講で学んだように、半径 r の円軌道を速さ v で動く物体の加速度には、中心向きの成分がある。その大きさは

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

である。

ここで大切なのは、**中心向きの加速度があるからといって、「向心力」という新しい種類の力が物体に追加されるわけではない**という点である。

円運動を実現しているのは、糸の張力、重力、垂直抗力、摩擦など、実際に物体が受けている力である。

円運動の半径方向の運動方程式

慣性系で物体を観察し、その瞬間の円の中心向きを正に取る。

物体が実際に受ける力の半径方向成分を、中心向きなら正、外向きなら負として足し合わせると、

$$\sum F_{\text{中心向き成分}} = \frac{mv^2}{r}$$

となる。

ここで、m は物体の質量、v はその瞬間の速さ、r は円軌道の半径である。

右辺は、中心向きに必要な**合力の成分**を表す。実在する力とは別に加える力ではない。

力の図を描く順序

円運動の問題でも、第 015 講の力の図と同じく、まず一つの物体を切り出す。

1. **対象を決める。** 小球や車など、運動方程式を立てる物体を一つ選ぶ。
2. **実在する力を描く。** 重力、張力、垂直抗力、摩擦など、他の物体から受ける力だけを描く。
3. **円の中心を見つける。** 対象から中心に向かう半径方向を決め、その向きを正とする。
4. **力の成分を足す。** 中心向きの成分を正、反対向きの成分を負として、合力を求める。
5. **運動方程式を立てる。** その合力を $m\frac{v^2}{r}$ と等しく置き、必要に応じて力が非負かも確かめる。

©ミライコーチング

力の向きを区別する

実在する力	物体が受ける向き
重力 mg	鉛直下向き
糸の張力 F_t	糸に沿って支持点に向かう向き
垂直抗力 N	接触面から物体が押される向き
摩擦力	接触面に沿い、相対運動または滑り出す傾向を妨げる向き

糸がついていない物体に糸の張力を描いたり、接触していない物体に垂直抗力を描いたりしてはいけない。

また、摩擦力の向きは接触面と相対運動の状態から決まる。**円軌道の接線方向になるとは限らない**。 平らな道路を車が曲がる場合には、路面との静止摩擦が水平な中心向きになることもある。

向心力を二重に足さない

張力 F_t が中心向きに働いている場合、その張力は中心向きの合力をつくる実在力である。

したがって、張力 F_t に加えて「向心力 $m\frac{v^2}{r}$」を別の矢印として描き、両方を足すのは誤りである。

本講では慣性系で考えるため、遠心力も追加の実在力として描かない。

円錐振り子：斜めの張力を分ける

天井の一点から軽く伸びない糸で小球をつるし、小球を水平な円軌道上で一定の速さで回す。この運動を円錐振り子という。

ここでは、糸の質量と空気抵抗を無視し、糸の長さを L、小球の質量を m、糸が鉛直方向となす角を θ とする。ただし、$0 < \theta < 90^\circ$ である。

小球が描く円の中心は、支持点の真下で、小球と同じ高さにある。

糸の長さと円の半径は違う

小球が描く円の半径 r は、糸の長さ L そのものではない。

糸を斜辺とする直角三角形を見ると、鉛直方向から測った角 θ に対して、水平な辺はその対辺になる。

したがって、

$$r = L\sin\theta$$

である。

張力の役割を二方向に分ける

小球に実際に働く力は、糸に沿う張力 F_t と、鉛直下向きの重力 mg の二つである。

張力 F_t を鉛直方向と水平方向に分けると、鉛直上向き成分は $F_t\cos\theta$、水平な中心向き成分は $F_t\sin\theta$ となる。

小球は水平面内を等速円運動し、高さは変わらない。そのため、鉛直方向の加速度は 0 である。

鉛直方向は、上向きを正として

$$F_t \cos\theta - mg = 0$$

より、

$$F_t \cos\theta = mg$$

となる。

一方、水平方向には中心向きの加速度がある。水平方向の中心向きを正とすると、

$$F_t \sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$

となる。

鉛直成分は重力とつり合い、水平成分が円運動に必要な合力をつくる。

$F_t\cos\theta$ と $F_t\sin\theta$ は一つの張力を分けて表したものであり、張力と別に追加される力ではない。

例題 1

長さ $L = 1.0\,\mathrm{m}$ の軽い糸につながれた質量 $m = 0.20\,\mathrm{kg}$ の小球が、水平面内を等速円運動している。糸が鉛直方向となす角を θ とし、$\sin\theta = 0.6$、$\cos\theta = 0.8$ である。

重力加速度の大きさを $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とし、空気抵抗を無視する。

(1) 円軌道の半径 r を求めよ。

(2) 糸の張力 F_t を求めよ。

(3) 張力の水平な中心向き成分を求めよ。

(4) 小球の中心向き加速度の大きさ a_r と速さ v を求めよ。

解答・解説

(1) 円軌道の半径は糸の水平成分に対応するので、

$$\begin{aligned} r &= L\sin\theta \\ &= (1.0\,\mathrm{m}) \times 0.6 \\ &= 0.60\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

となる。

(2) 鉛直方向には加速度がない。まず重力の大きさを求めると、

$$\begin{aligned} mg &= (0.20\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 2.0\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

鉛直方向のつり合いから、

$$\begin{aligned} F_t \cos\theta &= mg \\ F_t &= \frac{2.0\,\mathrm{N}}{0.8} \\ &= 2.5\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

(3) 水平な中心向き成分は、

$$\begin{aligned} F_t \sin\theta &= (2.5\,\mathrm{N}) \times 0.6 \\ &= 1.5\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

鉛直成分も確かめると、

$$(2.5\,\mathrm{N}) \times 0.8 = 2.0\,\mathrm{N}$$

となり、重力とつり合っている。

(4) 水平な中心向きの合力が 1.5 N なので、

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{1.5\,\mathrm{N}}{0.20\,\mathrm{kg}} \\ &= 7.5\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

である。

また、$a_r = \frac{v^2}{r}$ より、

$$\begin{aligned} v^2 &= a_r r \\ &= (7.5\,\mathrm{m/s^2})(0.60\,\mathrm{m}) \\ &= 4.5\,\mathrm{m^2/s^2} \end{aligned}$$

したがって、

$$v = \frac{3}{\sqrt{2}}\,\mathrm{m/s}$$

となる。

張力の大きさは 2.5 N だが、円運動に必要な水平な合力は 1.5 N である。この二つを区別することが重要である。

次の図は、例題 1 の小球がある瞬間にいる位置を、支持点とともに鉛直断面で表したものである。糸の長さや位置の描画寸法は模式的だが、力の矢印は同じ尺度で描いてある。

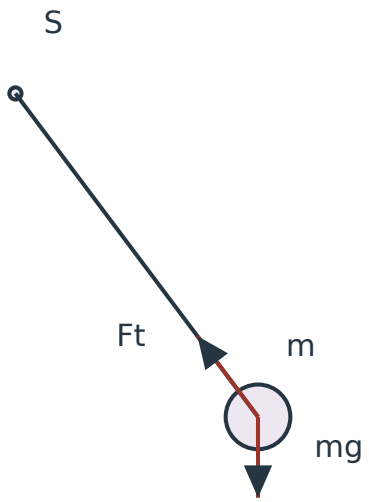

図 1　円錐振り子の鉛直断面。対象 m に張力 Ft と重力 mg。中心は m の左、S の鉛直下。力の大きさ 1 N を矢印の長さ 20 描画単位で表す。

図の張力 F_t は糸に沿って斜め上向き、重力 mg は真下向きである。

張力の矢印の水平成分は左向き、鉛直成分は上向きとなる。左向きが円の中心方向であり、鉛直成分は重力と打ち消し合う。

実際の速度は水平な円軌道の接線方向で、この瞬間の鉛直断面に対して垂直であるため、図には描いていない。

例題 2

長さ $L = \sqrt{2}\,\mathrm{m}$ の軽い糸につながれた質量 $m = 0.50\,\mathrm{kg}$ の小球が、糸を鉛直方向から 45° 傾け、水平面内を等速円運動している。

空気抵抗はなく、重力加速度の大きさは $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1) 円軌道の半径 r を求めよ。

(2) 張力 F_t を求めよ。

(3) 水平な中心向き成分と小球の速さ v を求めよ。

解答・解説

(1) $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ より、

$$\begin{aligned} r &= L\sin 45^\circ \\ &= \left(\sqrt{2}\,\mathrm{m}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 1.0\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

である。

(2) 重力は、

$$mg = (0.50\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) = 5.0\,\mathrm{N}$$

である。

鉛直方向のつり合いを使うと、

$$\begin{aligned} F_t\cos 45^\circ &= 5.0\,\mathrm{N} \\ F_t &= \frac{5.0\,\mathrm{N}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= 5\sqrt{2}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

(3) 張力の水平成分は、

$$\begin{aligned} F_t\sin 45^\circ &= \left(5\sqrt{2}\,\mathrm{N}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 5.0\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

である。

この水平成分が中心向きの合力なので、

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{r} &= 5.0\,\mathrm{N} \\ v^2 &= \frac{(5.0\,\mathrm{N})(1.0\,\mathrm{m})}{0.50\,\mathrm{kg}} \\ &= 10\,\mathrm{m^2/s^2} \end{aligned}$$

となり、

$$v = \sqrt{10}\,\mathrm{m/s}$$

である。

水平成分が 5.0 N だからといって、糸の張力も 5.0 N ではない。張力は鉛直成分も持つため、全体の大きさは $5\sqrt{2}$ N である。

鉛直面内の円運動：場所によって力の符号が変わる

次は、小球を軽く伸びない糸につなぎ、固定された中心 O のまわりで鉛直面内の円軌道を動かす場合を考える。糸が張っている間、円軌道の半径は糸の長さ r である。

小球に働く実在力は、糸の張力 F_t と重力 mg である。

円錐振り子と異なり、今度は小球の高さが変わる。重力によって運動中の速さが変化することもあるため、問題で与えられた**その瞬間の速さ**を使って考える。

最下点では、中心は上

円軌道の最下点に小球がいるとき、円の中心 O は小球の真上にある。

- 張力 F_t は上向きで、中心向きである。
- 重力 mg は下向きで、中心から遠ざかる向きである。

中心向き、すなわち上向きを正に取ると、

$$F_t - mg = \frac{mv^2}{r}$$

となる。

この式から、

$$F_t = \frac{mv^2}{r} + mg$$

である。

最下点では、張力が重力より大きいことで、差し引きした合力が中心向きに働く。

例題 3

質量 $m = 0.50\,\mathrm{kg}$ の小球が、長さ $r = 2.0\,\mathrm{m}$ の軽い糸につながれ、固定中心 O のまわりで鉛直面内の円運動をしている。

糸が張った状態で、小球が最下点を通過する瞬間の速さは $v = 6.0\,\mathrm{m/s}$ である。

重力加速度の大きさを $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1) 中心向きに必要な合力を求めよ。

(2) その瞬間の張力 F_t を求めよ。

解答・解説

(1) 円の中心は上である。必要な中心向きの合力は、

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{(0.50\,\mathrm{kg})(6.0\,\mathrm{m/s})^2}{2.0\,\mathrm{m}}$$
$$= 9.0\,\mathrm{N}$$

である。

(2) 重力は、

$$mg = (0.50\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) = 5.0\,\mathrm{N}$$

となる。

中心向きを正として運動方程式を立てると、

$$F_t - mg = \frac{mv^2}{r}$$

$$F_t - 5.0\,\mathrm{N} = 9.0\,\mathrm{N}$$

$$F_t = 14\,\mathrm{N}$$

である。

張力 14 N と重力 5.0 N の差が、中心向きの合力 9.0 N になる。

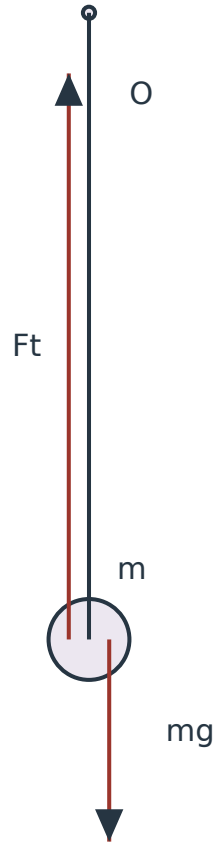

図 2　別条件の下端。対象 m の中心 O は上。張力 14N は上、重力 5N は下。力の大きさ 1 N を矢印の長さ 20 描画単位で表す。

図では、張力の矢印が重力の矢印より長い。どちらも同じ尺度で描かれているため、この差が中心向きの合力に対応する。

糸の描画上の長さは位置関係を表すための模式的な長さであり、力の矢印と同じ縮尺ではない。

©ミライコーチング

最上点では、中心は下

今度は小球が円軌道の最上点にいる場合を考える。

中心 O は小球の真下にあるので、半径方向の正は下向きになる。

糸が張っていれば、張力も重力も下向きである。したがって、

$$F_t + mg = \frac{mv^2}{r}$$

となり、

$$F_t = \frac{mv^2}{r} - mg$$

である。

最下点では重力を引いたが、最上点では重力を足す。これは公式を別々に暗記するためではない。**中心向きが逆になり、重力が中心向きかどうかも変わるため**である。

例題 4

例題 3 とは独立した別の条件を考える。

質量 $m = 0.50\,\mathrm{kg}$ の小球が、長さ $r = 2.0\,\mathrm{m}$ の軽い糸につながれ、固定中心 O のまわりで鉛直面内の円運動をしている。

糸が張った状態で、小球が最上点にいる瞬間の速さは $v = 6.0\,\mathrm{m/s}$ である。

重力加速度の大きさを $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1) 中心向きに必要な合力を求めよ。

(2) 張力 F_t を求めよ。

解答・解説

(1) 最上点では中心向きが下向きになる。必要な合力の大きさは、

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{(0.50\,\mathrm{kg})(6.0\,\mathrm{m/s})^2}{2.0\,\mathrm{m}}$$
$$= 9.0\,\mathrm{N}$$

である。

(2) 重力の大きさは 5.0 N である。張力も重力も中心向きなので、

$$F_t + mg = \frac{mv^2}{r}$$

$$F_t + 5.0\,\mathrm{N} = 9.0\,\mathrm{N}$$

$$F_t = 4.0\,\mathrm{N}$$

となる。

最上点では、重力 5.0 N と張力 4.0 N の和が、中心向きの合力 9.0 N をつくる。

例題 3 と例題 4 では同じ 6.0 m/s を使ったが、これは二つの独立した条件である。同一の小球が自由に一周する際、最下点と最上点で速さが等しいと仮定したものではない。

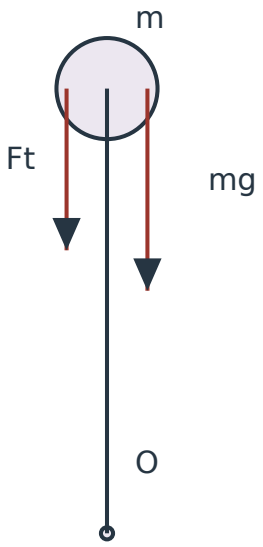

図 3　別条件の上端。対象 m の中心 O は下。張力 4N と重力 5N はともに下。力の大きさ 1 N を矢印の長さ 20 描画単位で表す。

上端では、張力と重力がどちらも中心向きに働いている。

図では二つの矢印を見分けられるよう、同じ小球の左右に始点を少しずらして描いている。これは力を区別するための表示であり、小球の回転や力のモーメントを表すものではない。

等速でなくても半径方向の式は使える

鉛直面内の円運動では、重力によって速さが変化する場合がある。

それでも、ある瞬間の円軌道の半径が r、速さが v なら、半径方向の加速度成分は $\frac{v^2}{r}$ である。

ただし、速さが変わるときには接線方向の加速度成分も存在し得る。したがって、非等速円運動の加速度全体が常に中心向きであるとは限らない。

最上点と最下点では、重力は半径方向に沿うため、その瞬間の重力の接線方向成分は 0 である。本講では、この二つの位置を中心に、半径方向の力を扱う。

張力や垂直抗力が負になったらどうするか

運動方程式から力を計算できても、それだけで仮定した運動が実際に成立すると決まるわけではない。

糸は引けるが、押せない

軽い糸が小球を引く力である張力は、負の大きさを持たない。

したがって、

$$F_t \geq 0$$

が必要である。

鉛直円運動の最上点では、

$$F_t = \frac{mv^2}{r} - mg$$

であるから、糸が張った状態で上端の円運動を実現するには、

$$\frac{mv^2}{r} - mg \geq 0$$

となる必要がある。

$m > 0$、$r > 0$ として整理すると、

$$v^2 \geq gr$$

である。

境界となる速さは、

$$v = \sqrt{gr}$$

である。このとき張力はちょうど 0 になる。

計算結果が $F_t < 0$ となった場合、それは「糸が負の張力で押している」という意味ではない。**糸が張ったまま、その半径と速さで円運動するという仮定が成り立たない**ことを示している。

なお、この条件は最上点での局所的な条件である。これだけで円全体を一周できることや、最下点で必要な速さまで判断できるわけではない。

円形レールでは垂直抗力を使う

糸ではなく、滑らかな円形レールの内側を小球が動く場合には、考える力が変わる。

内側の接触面から小球が受ける垂直抗力 N は、円の中心向きである。摩擦を無視すれば、小球に働く力は重力と垂直抗力である。

上端では、中心が下向きなので、

$$N + mg = \frac{mv^2}{r}$$

となる。

下端では、中心が上向きなので、

$$N - mg = \frac{mv^2}{r}$$

となる。

レールが小球を押す垂直抗力も、接触を保った状態では

$$N \geq 0$$

を満たす必要がある。

負の垂直抗力が必要になるなら、指定された内側レールとの接触を維持する仮定が成り立たない。

ここでは、内側レールだけを考えている。レールの外側に物体が接触する場合には、垂直抗力の向きが異なることに注意する。

水平な道路の円運動：静止摩擦が中心向きになる

平らな水平道路を車が一定の速さで曲がる場合を、質点の円運動として考える。

路面は水平で傾いておらず、空気抵抗を無視する。タイヤと路面の間で滑りが起こっていないとする。

車に働く力は、重力 mg、路面からの垂直抗力 N、タイヤと路面の間の静止摩擦力 f である。

鉛直方向には加速度がないため、上向きの垂直抗力と下向きの重力がつり合い、

$$N = mg$$

となる。

一方、水平方向には、円の中心に向かう合力が必要である。この理想化では静止摩擦力がその合力を担い、

$$f = \frac{mv^2}{r}$$

となる。

ここで、静止摩擦係数を μ_s とすると、静止摩擦力には

$$f \leq \mu_s N$$

という上限がある。

$\mu_s N$ は滑らずに働ける静止摩擦力の最大値であり、実際の摩擦力が常にその最大値になるわけではない。

今回の水平路では、曲がるために必要な摩擦力が上限を超えなければ、静止摩擦だけで円運動を維持できる。

摩擦の向きを決める根拠

摩擦力は接触面に沿い、物体どうしの相対運動、または滑り出そうとする傾向を妨げる向きに働く。

平らな道路を曲がる車では、必要な静止摩擦力は円の中心向きであり、瞬間の速度方向とは直交する。

摩擦を「常に運動方向と逆向き」や「常に円軌道の接線方向」と覚えてはいけない。接触面と滑りの状態から向きを判断する。

演習問題

演習 1

質量 $m = 0.50\,\mathrm{kg}$ の小球が、長さ $r = 2.0\,\mathrm{m}$ の軽い糸につながれ、固定中心 O のまわりで鉛直面内を動いている。

小球が最上点にいる瞬間について、糸が張った状態の円運動を仮定し、速さの二乗を

$$v^2 = 12\,\mathrm{m^2/s^2}$$

とする。重力加速度の大きさは $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ である。

演習 1(1)

この瞬間に必要な中心向きの合力の大きさを求めよ。

演習 1(2)

最上点での半径方向の運動方程式を立て、張力 F_t を計算せよ。また、求めた値が物理的に何を意味するか説明せよ。

演習 1(3)

糸が張っている最上点の円運動について、$F_t \geq 0$ を満たす速さ v の最小値を求めよ。

演習 1(4)

演習 1(3)で求めた速さの条件を満たせば、必ず鉛直円軌道を一周できると断定してよいか。理由とともに答えよ。

対応解説：巻末の「演習 1 の解答・解説」

©ミライコーチング

演習 2

滑らかな鉛直円形レールの**内側**を、質量 $m = 0.50\,\mathrm{kg}$ の小球が運動している。

レールの半径を $r = 2.0\,\mathrm{m}$、重力加速度の大きさを $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。摩擦と空気抵抗は無視し、小球には糸がついていない。

次の二つの条件は、それぞれ独立に考える。

- 条件 A：小球がレールの最上点を通過する瞬間の速さは $6.0\,\mathrm{m/s}$ である。
- 条件 B：別の条件で小球がレールの最下点を通過する瞬間の速さは $6.0\,\mathrm{m/s}$ である。

いずれも、指定された位置で小球がレールの内側に接触していると仮定する。

演習 2(1)

条件 A の最上点で、中心の向きと、小球が受ける実在力の種類・向きを答えよ。また、半径方向の運動方程式を立てよ。

演習 2(2)

条件 A での垂直抗力 N を求め、接触を維持する条件に適合するか判断せよ。

演習 2(3)

条件 B の最下点で、中心向きを正として運動方程式を立て、垂直抗力 N を求めよ。

演習 2(4)

条件 A と条件 B では、どちらも速さが同じである。それでも二つの垂直抗力が異なる理由を説明せよ。また、この二条件を同一の自由運動の連続場面とみなしてよいか答えよ。

対応解説：巻末の「演習 2 の解答・解説」

©ミライコーチング

演習 3

質量 $m = 1000\,\mathrm{kg}$ の車が、平らな水平道路で半径 $r = 50\,\mathrm{m}$ の円軌道を、速さ $v = 10\,\mathrm{m/s}$ で曲がろうとしている。

車を質点として扱い、路面の傾き、空気抵抗、タイヤの細かな変形は考えない。タイヤと路面は滑っておらず、水平方向の力は静止摩擦力だけとする。

静止摩擦係数は $\mu_s = 0.30$、重力加速度の大きさは $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ である。

演習 3(1)

車に働く実在力の種類と向きを挙げ、垂直抗力 N を求めよ。

演習 3(2)

この速さで円運動を行うために必要な静止摩擦力の大きさ f を求めよ。

演習 3(3)

静止摩擦力の最大値を求め、指定された速さで滑らずに曲がれるか判断せよ。また、実際に必要な摩擦力と最大値を区別して答えよ。

演習 3(4)

この条件で静止摩擦によって円運動を維持できる速さの上限 $v_{\max}$ を求めよ。

対応解説：巻末の「演習 3 の解答・解説」

演習 4

円運動の力の図について、次の問いに答えよ。いずれも慣性系で考える。

演習 4(1)

円錐振り子で、小球に張力 F_t と重力 mg が働いているとする。

「円運動には向心力が必要だから、張力と重力に加えて、中心向きにもう一本 $m\frac{v^2}{r}$ の力を描く」という考え方は正しいか。理由を説明せよ。

演習 4(2)

「摩擦力はいつでも物体の進行方向と逆向きだから、円運動では接線方向にしか働かない」という主張は正しいか。平らな水平道路を滑らずに曲がる車を例に説明せよ。

演習 4(3)

糸でつられた円錐振り子と、滑らかな鉛直円形レールの内側を動く小球を比較する。

それぞれの中心向きの合力をつくる実在力を説明し、「円運動なら、張力または垂直抗力の大きさが常に $m\frac{v^2}{r}$ に等しい」としてよいか答えよ。

対応解説：巻末の「演習 4 の解答・解説」

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

演習 1(1)

最上点の中心は小球の真下にある。したがって中心向きを下向きとして考える。

必要な中心向きの合力の大きさは、

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{(0.50\,\mathrm{kg})(12\,\mathrm{m^2/s^2})}{2.0\,\mathrm{m}}$$
$$= 3.0\,\mathrm{N}$$

となる。

答えは 3.0 N、**下向き** である。

演習 1(2)

小球に働く力は、糸に沿う張力 F_t と重力 mg の二つである。

最上点ではどちらも下向きなので、張力が存在して糸が張っていると仮定すれば、

$$F_t + mg = \frac{mv^2}{r}$$

となる。

重力は、

$$mg = (0.50\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) = 5.0\,\mathrm{N}$$

である。

よって、

$$F_t + 5.0\,\mathrm{N} = 3.0\,\mathrm{N}$$
$$F_t = -2.0\,\mathrm{N}$$

となる。

ただし、糸の張力の大きさが負になることはない。

この結果は、実際に $-2.0\,\mathrm{N}$ の張力が働くという意味ではなく、**与えられた速さで糸が張ったまま上端の円運動をするという仮定が成り立たない**ことを示す。

重力だけですでに 5.0 N の下向きの力が働くため、糸がさらに下向きに引くことで、中心向きの合力を 3.0 N に小さくすることはできない。

演習 1(3)

糸が張っているための条件は $F_t \geq 0$ である。

最上点で、

$$F_t = \frac{mv^2}{r} - mg$$

なので、

$$\frac{mv^2}{r} - mg \geq 0$$

$$v^2 \geq gr$$

である。

境界となる速さは、

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{gr} \\ &= \sqrt{(10\,\mathrm{m/s^2})(2.0\,\mathrm{m})} \\ &= \sqrt{20}\,\mathrm{m/s} \\ &= 2\sqrt{5}\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

答えは $2\sqrt{5}\,\mathrm{m/s}$ である。

この速さでは最上点の張力は 0 となる。これより小さい速さでは、糸が張ったままの上端円運動は成立しない。

演習 1(4)

断定できない。

演習 1(3)で求めた条件は、最上点という一つの位置で、必要な半径方向の合力を糸と重力で実現できるかを調べた条件である。

一周する間には小球の高さが変わり、重力によって速さが変化することもある。

したがって、最上点での局所的な条件を満たすだけで、円軌道全体で糸が張り続けることや、一周に必要な初期条件まで保証したことにはならない。

この問題では、最上点での張力条件と円全体の運動条件を区別することが重要である。

演習 2 の解答・解説

演習 2(1)

条件 A はレール内側の最上点である。円の中心は小球の真下にあるので、中心向きは下向きである。

小球に働く実在力は、次の二つである。

- 重力 mg：鉛直下向き
- レールからの垂直抗力 N：中心向き、すなわち下向き

どちらも中心向きなので、

$$N + mg = \frac{mv^2}{r}$$

となる。

小球は糸につながれていないため、張力 F_t は働かない。

演習 2(2)

中心向きに必要な合力は、

$$\begin{aligned}\frac{mv^2}{r} &= \frac{(0.50\,\mathrm{kg})(6.0\,\mathrm{m/s})^2}{2.0\,\mathrm{m}} \\ &= 9.0\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

である。

重力は、

$$mg = (0.50\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) = 5.0\,\mathrm{N}$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned}N + mg &= \frac{mv^2}{r} \\ N + 5.0\,\mathrm{N} &= 9.0\,\mathrm{N} \\ N &= 4.0\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

となる。

垂直抗力は正であり、

$$N = 4.0\,\mathrm{N} > 0$$

である。

よって、**最上点でレール内側との接触を維持する条件に適合する。**

演習 2(3)

条件 B はレール内側の最下点である。円の中心は小球の真上にある。

垂直抗力 N は上向きで中心向き、重力 mg は下向きで中心とは反対向きである。

したがって、

$$N - mg = \frac{mv^2}{r}$$

と立式する。

数値を代入すると、

$$N - 5.0\,\mathrm{N} = 9.0\,\mathrm{N}$$
$$N = 14\,\mathrm{N}$$

となる。

答えは 14 N**、上向き** である。

この値も正なので、最下点での接触条件 $N \geq 0$ に適合する。

演習 2(4)

二条件では質量、半径、瞬間の速さが同じなので、必要な中心向きの合力はどちらも 9.0 N である。

しかし、最上点では重力が中心向きに働くため、

$$N + mg = \frac{mv^2}{r}$$

である。

一方、最下点では重力が中心と反対向きに働くため、

$$N - mg = \frac{mv^2}{r}$$

である。

つまり、**必要な中心向き合力が同じでも、重力の中心向き成分の符号が違うため、垂直抗力は異なる**。

また、条件 A と条件 B は独立に与えられている。鉛直面内を自由に運動する小球では高さによって速さが変化し得るため、両条件の 6.0 m/s を同一運動の上端と下端の速さとみなしてはいけない。

同一運動として関係づけるには、別途その運動の条件が必要である。

演習 3 の解答・解説

演習 3(1)

水平路を曲がる車に働く実在力は、次の三つである。

- 重力 mg：鉛直下向き
- 垂直抗力 N：鉛直上向き
- 静止摩擦力 f：水平な円の中心向き

車は鉛直方向に加速していないため、

$$N - mg = 0$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} N &= mg \\ &= (1000\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s^2}) \\ &= 10000\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

答えは $N = 10000\,\mathrm{N}$、**上向き** である。

演習 3(2)

水平方向では、静止摩擦力が中心向きの合力となる。

したがって、

$$f = \frac{mv^2}{r}$$

である。

数値を代入すると、

$$\begin{aligned} f &= \frac{(1000\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s})^2}{50\,\mathrm{m}} \\ &= 2000\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

答えは $2000\,\mathrm{N}$、**水平な中心向き** である。

静止摩擦力は、車が道路上で横滑りしようとする傾向を妨げる向きに働く。この条件では、それが円の中心向きに一致する。

演習 3(3)

最大静止摩擦力は、

$$f_{\max} = \mu_s N$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} f_{\max} &= 0.30 \times (10000\,\mathrm{N}) \\ &= 3000\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

となる。

必要な摩擦力は 2000 N なので、

$$2000\,\mathrm{N} < 3000\,\mathrm{N}$$

である。

よって、**この理想化した条件では、車は滑らずに指定の円運動を維持できる。**

ここで、二つの値を混同してはいけない。

- 実際に必要な静止摩擦力：2000 N
- 働くことのできる静止摩擦力の最大値：3000 N

静止摩擦力は必要に応じて上限以下の値を取り、いつでも最大値で働くわけではない。

演習 3(4)

滑らずに円運動を維持するには、

$$\frac{mv^2}{r} \leq \mu_s N$$

を満たす必要がある。

水平路では $N = mg$ なので、

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{r} &\leq \mu_s mg \\ v^2 &\leq \mu_s g r \end{aligned}$$

となる。

速さの上限は、等号が成立する境界で求められる。

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \sqrt{\mu_s g r} \\ &= \sqrt{0.30(10\,\mathrm{m/s^2})(50\,\mathrm{m})} \\ &= \sqrt{150}\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

したがって、答えは $\sqrt{150}\,\mathrm{m/s}$ である。

これは約 12.2 m/s に相当する。

この上限は、水平路、指定された静止摩擦係数、質点モデルなどの仮定のもとで得られた値である。路面の傾斜やタイヤの詳しい性質まで含めた一般的な車の限界速さを示すものではない。

演習 4 の解答・解説

演習 4(1)

正しくない。

向心力は、円運動に必要な中心向きの合力を指す言い方であり、張力や重力と別に存在する新しい実在力ではない。

円錐振り子で小球に働く実在力は、張力 F_t と重力 mg である。

鉛直方向では、

$$F_t \cos\theta = mg$$

となり、水平方向では、

$$F_t \sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$

となる。

円運動に必要な中心向きの合力は、張力の水平成分によって実現している。

そのため、張力と重力を描いたうえで、さらに $m\frac{v^2}{r}$ の力を追加すると、同じ力の効果を二重に数えてしまう。

演習 4(2)

正しくない。

摩擦力の向きは、接触面に沿う相対運動や滑り出しの傾向から決まるため、必ずしも物体の進行方向と逆向きではない。

平らな水平道路を車が滑らずに曲がるとき、車には水平な中心向きの加速度が必要である。

路面の傾きや空気抵抗などを無視したモデルでは、その加速度を生み出すのはタイヤと路面の間の静止摩擦力である。

この摩擦力は水平な中心向きであり、瞬間の速度が向く円軌道の接線方向とは直交している。

したがって、摩擦力の向きは「速度と逆向き」と暗記するのではなく、接触面と相対運動・滑りの傾向から判断する必要がある。

演習 4(3)

円錐振り子では、小球が受ける実在力は張力 F_t と重力 mg である。

水平な中心向きの合力は張力の水平成分であり、

$$F_t \sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$

となる。

したがって、一般には張力 F_t そのものが $m\frac{v^2}{r}$ と等しいわけではない。

一方、滑らかな鉛直円形レールの内側では、小球に働く実在力は垂直抗力 N と重力 mg である。

最上点では両方が中心向きなので、

$$N + mg = \frac{mv^2}{r}$$

となる。

最下点では重力が中心とは反対向きなので、

$$N - mg = \frac{mv^2}{r}$$

となる。

よって、**「円運動なら張力や垂直抗力が常に $m\frac{v^2}{r}$ に等しい」としてはいけない。**

$m\frac{v^2}{r}$ に等しいのは、あくまで中心向きに取った実在力の成分の符号付き合計である。

単独の張力や垂直抗力をそのまま $m\frac{v^2}{r}$ と置けるのは、その力自体が中心向きに働き、ほかの実在力の半径方向成分がなく、その力だけで中心向きの合力を担う場合である。

この判断は、糸・レール・道路など、円運動を生み出す仕組みが変わっても共通して使える。

©ミライコーチング