

第 10 講 有理数・無理数・実数

学習目標

- ・整数、有理数、無理数、実数の関係を説明できる。
- ・与えられた数が有理数か無理数かを判断できる。
- ・有限小数や循環小数が有理数である理由を、分数と結びつけて説明できる。
- ・平方根を含む数を整理してから、有理数か無理数かを判断できる。

数はどこまで広がっているか

整数だけでは表せない数がある

3、0、 -5 のような数は整数です。しかし、日常の計算では $\frac{1}{2}$ や 0.7 のように、整数だけでは表せない数も使います。

たとえば 0.7 は、

$$0.7 = \frac{7}{10}$$

と分数で表せます。

$\frac{2}{3}$ や $-\frac{5}{4}$ のような数も、整数どうしの割り算として表されています。

このように、**整数の比で表せる数**をまとめたものが有理数です。

有理数

整数 m と 0 でない整数 n を使って、

$$\frac{m}{n}$$

の形に表せる数を**有理数**といいます。

整数も有理数に含まれる

整数 5 は $5 = \frac{5}{1}$ 、整数 -3 は $-3 = \frac{-3}{1}$ と書けます。

したがって、すべての整数は有理数です。

小数と有理数

有限小数は分数に直せる

小数点以下が途中で終わる小数を**有限小数**といいます。

たとえば、

$$0.24 = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$$

です。

有限小数は、 10 、 100 、 1000 などを分母とする分数に直せるので、必ず有理数です。

同じ並びを繰り返す小数も有理数

$0.333\dots$ のように、同じ数字や数字の並びが繰り返される小数を**循環小数**といいます。

たとえば、

$$\frac{1}{3} = 0.333\dots$$

です。

循環小数も分数に表せるため、有理数です。

別の例として、 $x = 0.121212\dots$ とします。小数点以下で「12」が繰り返されているので、 $100x$ を考えると、

$$100x = 12.121212\dots$$

となります。

元の式 $x = 0.121212\dots$ を引けば、

$$100x - x = 12.121212\dots - 0.121212\dots$$

$$99x = 12$$

です。

したがって、 $x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$ となり、循環小数が分数に直せました。

終わらない小数がすべて無理数とは限らない

小数表示が終わらなくても、同じ並びを繰り返す循環小数は有理数です。

「小数が無限に続くから無理数」と判断してはいけません。

- 有限小数は有理数
- 循環小数は有理数
- 循環しない無限小数は無理数

という違いを押さえます。

無理数とは何か

無理数

有理数ではない数、つまり整数 m と 0 でない整数 n を使った $\frac{m}{n}$ の形に表せない数を無理数といいます。

平方根には有理数になるものと無理数になるものがある

$\sqrt{4}$ は、

$$\sqrt{4} = 2$$

なので有理数です。

一方、 $\sqrt{2}$ は整数どうしの比では表せないため、無理数です。

平方根を見た瞬間に「無理数」と決めるのではなく、平方根の中の数を整理した結果が何になるかを確認することが大切です。

たとえば、

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

です。

$\sqrt{3}$ は無理数なので、 $2\sqrt{3}$ も無理数です。

$\sqrt{9}$ と $x^2 = 9$ は違う

$\sqrt{9}$ は 3 を表します。

$$\sqrt{9} = 3$$

一方、方程式 $x^2 = 9$ の解は $x = 3, -3$ です。

$\sqrt{a}$ という記号は、 $a \geq 0$ のとき「2 乗すると a になる 0 以上の数」を表します。

代表的な無理数

$\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{5}$ 、 π などは無理数です。

ただし、 $\sqrt{1} = 1$ 、 $\sqrt{4} = 2$ 、 $\sqrt{9} = 3$ のように、平方根を計算した結果が整数になるものは有理数です。

実数という大きなまとまり**実数**

有理数と無理数を合わせた数全体を**実数**といいます。

数の分類は入れ物の関係で考える

整数は有理数の一部であり、有理数と無理数を合わせると実数になります。

関係を並べると、次のようになります。

- -4 は整数であり、有理数であり、実数でもある。
- $\frac{3}{5}$ は有理数であり、実数でもある。
- $\sqrt{2}$ は無理数であり、実数でもある。
- π は無理数であり、実数でもある。

「整数か有理数か」のようにどちらか一方だけを選ぶのではなく、整数は有理数の中に含まれていることを意識しましょう。

数	整数	有理数	無理数	実数
-3	○	○	×	○
$\frac{2}{5}$	×	○	×	○
0.75	×	○	×	○
$\sqrt{2}$	×	×	○	○
π	×	×	○	○
$\sqrt{9}$	○	○	×	○

例題**例題 1**

次の数を、有理数と無理数に分類しなさい。

$$-7, \quad \frac{4}{9}, \quad 0.6, \quad \sqrt{3}, \quad \sqrt{25}, \quad \pi$$

例題 1 の解答・解説

-7 は整数なので、 $-\frac{7}{1}$ と表せます。したがって有理数です。

$\frac{4}{9}$ は整数どうしの比で表されているので、有理数です。

0.6 は、

$$0.6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

と表せるため、有理数です。

$\sqrt{3}$ は無理数です。

$\sqrt{25} = 5$ なので、有理数です。

π は無理数です。

したがって、

- 有理数： $-7, \frac{4}{9}, 0.6, \sqrt{25}$
- 無理数： $\sqrt{3}, \pi$

となります。

例題 2

循環小数 $0.777\dots$ を分数で表しなさい。

例題 2 の解答・解説

$x = 0.777\dots$ とおきます。

1 桁の「7」が繰り返されているので、両辺を 10 倍します。

$$10x = 7.777\dots$$

ここから元の式 $x = 0.777\dots$ を引きます。

$$10x - x = 7.777\dots - 0.777\dots$$

$$9x = 7$$

したがって、 $x = \frac{7}{9}$ です。

よって、 $0.777\dots = \frac{7}{9}$ となり、この循環小数は有理数です。

例題 3

次の数が有理数か無理数かを答えなさい。

$$\sqrt{36}, \sqrt{18}$$

例題 3 の解答・解説

$\sqrt{36}$ は、

$$\sqrt{36} = 6$$

なので有理数です。

一方、 $\sqrt{18}$ は、

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

と整理できます。

$\sqrt{2}$ は無理数なので、 $3\sqrt{2}$ も無理数です。

したがって、 $\sqrt{36}$ は有理数、 $\sqrt{18}$ は無理数です。

平方根が付いているかどうかだけで判断せず、先に値を整理することが大切です。

演習問題

練習問題 1

次の数のうち、有理数をすべて選びなさい。

$$-5, \quad \frac{7}{8}, \quad \sqrt{7}, \quad 1.25, \quad \sqrt{49}, \quad \pi$$

練習問題 2

次の数のうち、無理数をすべて選びなさい。

$$0, \quad 0.333..., \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt{16}, \quad \sqrt{10}$$

練習問題 3

有限小数 0.375 を既約分数で表しなさい。

練習問題 4

循環小数 0.444... を分数で表しなさい。

練習問題 5

循環小数 0.272727... を分数で表しなさい。

練習問題 6

次の数が有理数か無理数かを答えなさい。

$$\sqrt{64}, \quad \sqrt{20}, \quad 5 + \sqrt{3}$$

練習問題 7

$\sqrt{10}$ はどの連続する 2 つの整数の間にあるか答えなさい。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

-5 は整数なので有理数です。

$\frac{7}{8}$ は整数どうしの比なので有理数です。

$\sqrt{7}$ は無理数です。

1.25 は有限小数であり、

$$1.25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$$

と表せるので有理数です。

$\sqrt{49} = 7$ なので有理数です。

π は無理数です。

したがって、有理数は $-5, \frac{7}{8}, 1.25, \sqrt{49}$ です。

練習問題 2 の解答・解説

0 は整数なので有理数です。

$0.333\dots$ は循環小数であり、 $\frac{1}{3}$ と表せるので有理数です。

$\sqrt{2}$ は無理数です。

$\sqrt{16} = 4$ なので有理数です。

$\sqrt{10}$ は無理数です。

したがって、無理数は $\sqrt{2}, \sqrt{10}$ です。

無限に続く小数でも、循環している場合は有理数であることに注意しましょう。

練習問題 3 の解答・解説

0.375 は小数第 3 位までの有限小数なので、

$$0.375 = \frac{375}{1000}$$

です。

分子と分母を 125 で割ると、

$$\frac{375}{1000} = \frac{3}{8}$$

となります。

したがって、 $0.375 = \frac{3}{8}$ です。

練習問題 4 の解答・解説

$x = 0.444\ldots$ とおきます。

両辺を 10 倍すると、

$$10x = 4.444\ldots$$

です。

元の式を引きます。

$$10x - x = 4.444\ldots - 0.444\ldots$$

$$9x = 4$$

したがって、 $x = \frac{4}{9}$ です。

よって、 $0.444\ldots = \frac{4}{9}$ です。

練習問題 5 の解答・解説

$x = 0.272727\ldots$ とおきます。

「27」という 2 桁の並びが繰り返されているので、両辺を 100 倍します。

$$100x = 27.272727\ldots$$

元の式を引きます。

$$100x - x = 27.272727\ldots - 0.272727\ldots$$

$$99x = 27$$

したがって、

$$x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

です。

よって、 $0.272727\ldots = \frac{3}{11}$ です。

練習問題 6 の解答・解説

$\sqrt{64}$ は、

$$\sqrt{64} = 8$$

なので有理数です。

$\sqrt{20}$ は、

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

です。

$\sqrt{5}$ は無理数なので、 $\sqrt{20}$ も無理数です。

$5 + \sqrt{3}$ について、5 は有理数、 $\sqrt{3}$ は無理数です。有理数に無理数を足しても有理数にはならないので、 $5 + \sqrt{3}$ は無理数です。

したがって、 $\sqrt{64}$ は有理数、 $\sqrt{20}$ と $5 + \sqrt{3}$ は無理数です。

練習問題 7 の解答・解説

10 に近い平方数を探します。

$$3^2 = 9, \quad 4^2 = 16$$

であり、 $9 < 10 < 16$ です。

正の数では、平方根をとっても大小関係が保たれるので、 $3 < \sqrt{10} < 4$ となります。

したがって、 $\sqrt{10}$ は 3 と 4 の間にあります。