第 012 講 投げた物体の運動を分けて考える

この講でできるようになること

- 一つの物体の運動を水平・鉛直方向に分け、共通の経過時間を使って位置と速度を求めることができる。
- 水平投射で地面に到達する時刻を求め、その時刻の水平位置を判断できる。
- 斜方投射の初速度を成分に分け、最高点と着地点での運動を説明できる。
- 初期条件、正方向、着地する高さを確認し、計算結果のうち物理的に意味のあるものを選ぶことができる。

1. 曲がった運動を二つの方向から見る

ボールを水平方向に投げると、ボールは前へ進みながら下へ落ちていく。地面に落ちるまでの道筋は曲線になるが、水平方向と鉛直方向を別々に観察すると、それぞれの変化を整理しやすくなる。

ここで重要なのは、**水平に進むボールと鉛直に落ちるボールという二つの物体を考えているわけではない**という点である。一つのボールが同じ時間に行う運動を、直交する二つの方向に分けて表している。

1.1 座標と時刻の約束

第 011 講では鉛直方向の位置を x で表した。本講では平面内の運動を扱うため、**水平方向の位置を x、鉛直方向の位置を y** とする。文字の役割を変更するだけであり、鉛直方向の等加速度運動の法則が変わるわけではない。

座標と時間について、次のように定める。

記号	意味	約束
x	水平方向の位置	右向きを正
y	鉛直方向の位置	上向きを正
x_0	投げた瞬間の水平位置	基準点からの位置
y_0	投げた瞬間の鉛直位置	地面を $y=0$ とする
t_0	投げた時刻	初期時刻
t	観察する時刻	$t \geq t_0$
τ	投げてからの経過時間	$\tau = t - t_0 \geq 0$

位置は基準点から測った座標であり、変位は二つの時刻の位置の差である。例えば、水平位置が $2\,\mathrm{m}$ から $7\,\mathrm{m}$ へ変化したとき、水平変位は $+5\,\mathrm{m}$ となる。

本講では、地表付近で重力加速度の大きさを一定とし、空気抵抗を無視する。また、投げた後から最初に地面へ到達する直前までの運動を考える。

重力加速度の大きさを g と表し、$g>0$ とする。鉛直上向きを正にしたため、鉛直方向の加速度は $-g$ となる。

数値計算では、問題中で別に指定しない限り、長さを m、時間を s、速度を m/s、加速度を $\mathrm{m/s^2}$ で扱う。例えば $g=10\,\mathrm{m/s^2}$ とした場合、$y=20-5\tau^2$ のような数値式は、y を m で測った数値、τ を s で測った数値として表すものとする。

1.2 二つの方向の加速度

空気抵抗を無視した投射運動では、投げた後の加速度は次のようになる。

$$a_x = 0$$
$$a_y = -g$$

水平方向には加速度がないため、水平速度は変化しない。一方、鉛直方向には下向きの加速度があるため、鉛直速度は時間とともに変化する。

投げた瞬間に前向きの速度を与えても、その後ずっと前向きの力が働き続けるわけではない。空気抵抗を無視する条件では、**水平方向の加速度が 0 なので、最初に与えた水平速度が保たれる**のである。

投射運動の成分式

投げた瞬間の速度を、水平成分 v_{0x} と鉛直成分 v_{0y} に分ける。投げてからの共通の経過時間を τ とすると、位置は次の式で表される。

$$x = x_0 + v_{0x}\tau$$
$$y = y_0 + v_{0y}\tau - \frac{1}{2}g\tau^2$$

同じ経過時間における速度成分は、次の式で表される。

$$v_x = v_{0x}$$
$$v_y = v_{0y} - g\tau$$

これらは、空気抵抗を無視し、重力加速度を一定とした投射運動の式である。

水平と鉛直の式には、どちらも同じ τ を代入する。水平位置を投げてから 1 s 後、鉛直位置を 2 s 後で計算して組み合わせても、一つの物体の同じ瞬間の位置にはならない。

また、時刻 t と経過時間 τ は区別する。例えば、時刻 $t_0 = 3\,\mathrm{s}$ に投げたボールを時刻 $t = 5\,\mathrm{s}$ に観察する場合、式へ代入する経過時間は $\tau = 2\,\mathrm{s}$ である。

ミライポイント！

運動を方向ごとに分けても、時計は一つである。

同じ τ を水平・鉛直の式へ代入し、得られた二つの位置を組み合わせることで、その瞬間の物体の位置が決まる。

2. 水平投射を調べる

高い場所からボールを真横に投げる運動を、水平投射という。投げた瞬間には鉛直方向の速度がなく、水平速度だけをもっている。

水平投射では、初速度の鉛直成分が $v_{0y} = 0$ である。右向きに投げる場合、$v_{0x} > 0$ となる。

初期位置を $(0, y_0)$、初期高さを $y_0 > 0$ とすると、位置と速度の式は次のようになる。

$$x = v_{0x}\tau$$

$$y = y_0 - \frac{1}{2}g\tau^2$$

$$v_x = v_{0x}$$

$$v_y = -g\tau$$

水平位置は経過時間に比例して増える。一方、鉛直位置は経過時間の二乗に関係して減少するため、ボールは次第に大きく下がりながら進む。

2.1 同じ時間の位置を組み合わせる

地面から 20 m の高さにある点 $(0, 20\,\mathrm{m})$ から、ボールを右向きに 5 m/s で水平投射する。重力加速度の大きさを $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

この条件では、τ を s、x, y を m で測った数値として、位置と速度の式は次のようになる。

$$x = 5\tau$$

$$y = 20 - 5\tau^2$$

$$v_x = 5$$

$$v_y = -10\tau$$

このときの空間内の軌道を、横軸を水平位置 x、縦軸を鉛直位置 y として表す。

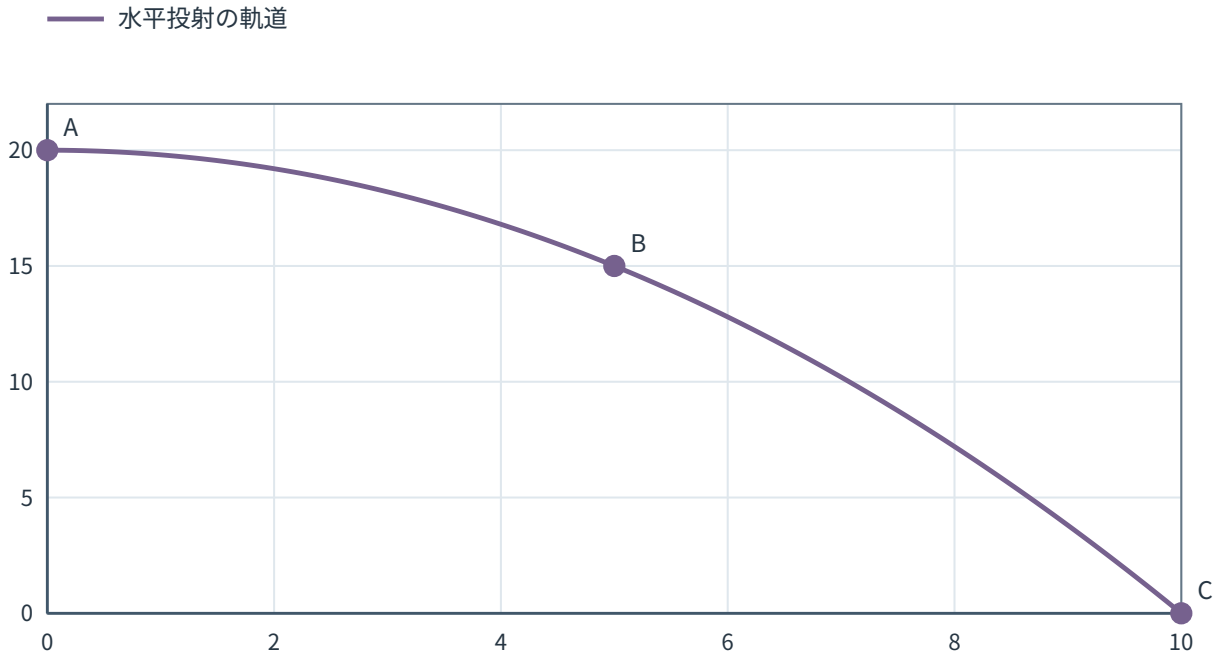


図 1　横軸 x と縦軸 y は m で測った位置。A から B、C へ同じ 1 秒間隔で進む

図の曲線は、上の二つの位置の式から経過時間を消去して得られる $y = 20 - 0.2x^2$ を、地面に到達するまでの範囲で描いたものである。図中の A、B、C はボールの位置であり、同じボールが時間とともに移動する順番を表している。

図と式の対応を、同じ経過時間ごとの表で確かめる。

経過時間 τ（s）	x（m）	y（m）	v_x（m/s）	v_y（m/s）
0	0	20	5	0
1	5	15	5	-10
2	10	0	5	-20

$\tau = 1\,\mathrm{s}$ の行を見ると、水平位置は 5 m、鉛直位置は 15 m である。したがって、この瞬間のボールの位置は $(5\,\mathrm{m}, 15\,\mathrm{m})$ となり、図の B に対応する。

次の 1 s 間には水平にさらに 5 m 進むが、鉛直方向には 15 m から 0 m まで下がる。同じ時間間隔でも鉛直方向の変位が変わるのは、鉛直速度が一定ではないためである。

空間の軌道と時間のグラフ

この軌道図の横軸は位置 x であり、時間ではない。横軸が時刻 t や経過時間 τ のグラフとは区別する必要がある。

また、曲線の長さは物体が実際に進んだ道のりであり、水平位置の変化量とは異なる。図の A から C までの水平変位は $+10\,\mathrm{m}$ だが、曲線に沿った道のりを 10 m としてはならない。

2.2 地面に着く時刻を求める

水平投射の問題では、地面に着く時刻を先に調べると、着地点の水平位置も求められる。

地面を $y = 0$ としたので、初期高さ y_0 から水平投射したボールが地面に達するとき、

$$0 = y_0 - \frac{1}{2} g \tau^2$$

が成り立つ。これを変形すると、

$$\tau^2 = \frac{2y_0}{g}$$

となる。数学的には正と負の二つの根が考えられるが、τ は投げてからの経過時間なので $\tau \geq 0$ でなければならない。

したがって、地面へ到達するまでの時間は、

$$\tau = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

となる。ただし、これは $y_0 > 0$、初速度の鉛直成分 0、空気抵抗なし、地面まで同じ加速度で落下するという条件で導いた関係である。

到達時間が求まったら、同じ τ を水平位置の式へ代入すればよい。

例題 1

地面から 45 m の高さにある点から、ボールを右向きに 4 m/s で水平投射した。投げた位置の真下を水平位置 $x=0$、地面を $y=0$ とし、投げた瞬間を $\tau=0$ とする。

空気抵抗を無視し、重力加速度の大きさを $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1) 地面に到達するまでの時間を求めよ。

(2) 地面に到達するまでの水平変位を求めよ。

(3) 地面に到達する直前の速度の水平成分と鉛直成分を、それぞれ正負の符号付きで求めよ。

解答・解説

初速度は水平向きなので、$v_{0x}=4\,\mathrm{m/s}$、$v_{0y}=0$ である。

(1) 鉛直方向の式に初期高さを代入する。τ を s、y を m で測った数値とすると、

$$y=45-5\tau^2$$

である。着地するとき $y=0$ だから、

$$0=45-5\tau^2$$

$$\tau^2=9$$

となる。数学的な根は $\tau=3$ と $\tau=-3$ だが、負の経過時間は今回の運動に対応しない。

したがって、地面に到達するまでの時間は 3 s である。

(2) 水平方向の速度は一定なので、

$$\Delta x=v_{0x}\tau$$

となる。(1)で求めた時間を使うと、

$$\Delta x=4\times3=12\,\mathrm{m}$$

である。よって、水平変位は **右向きに** 12 m である。

(3) 水平速度は変化しないため、

$$v_x=+4\,\mathrm{m/s}$$

となる。鉛直速度は、

$$v_y=0-10\times3=-30\,\mathrm{m/s}$$

である。

よって、地面に到達する直前の速度成分は、**水平成分** $+4\,\mathrm{m/s}$、**鉛直成分** $-30\,\mathrm{m/s}$ である。負の鉛直速度は下向きに運動していることを示す。

2.3 横向きに速く投げると、落ちる時間も変わるのか

同じ高さから、初速度の鉛直成分を 0 にして二つのボールを水平投射する。一方だけ水平速度を大きくした場合を考える。

空気抵抗を無視し、初期高さと重力加速度を同じに保つと、鉛直方向の位置はどちらも、

$$y = y_0 - \frac{1}{2}g\tau^2$$

で表される。この式には水平速度が含まれていない。

したがって、**水平速度だけを変えても、同じ高さの地面に到達するまでの時間は変わらない**。ただし、水平速度が大きいボールほど、その時間に進む水平距離は長くなる。

ここで固定したのは初期高さ、初期鉛直速度、重力加速度、着地する高さである。投げる高さや鉛直方向の初速度まで変えた場合には、落下時間が同じとは限らない。

3. 斜めに投げる運動

ボールを右斜め上向きに投げる運動を考える。このように初速度が斜め方向を向いている投射を、斜方投射という。

水平投射との違いは、投げた瞬間から鉛直方向にも速度をもっている点である。しかし、投げた後の加速度については同じ条件を使う。

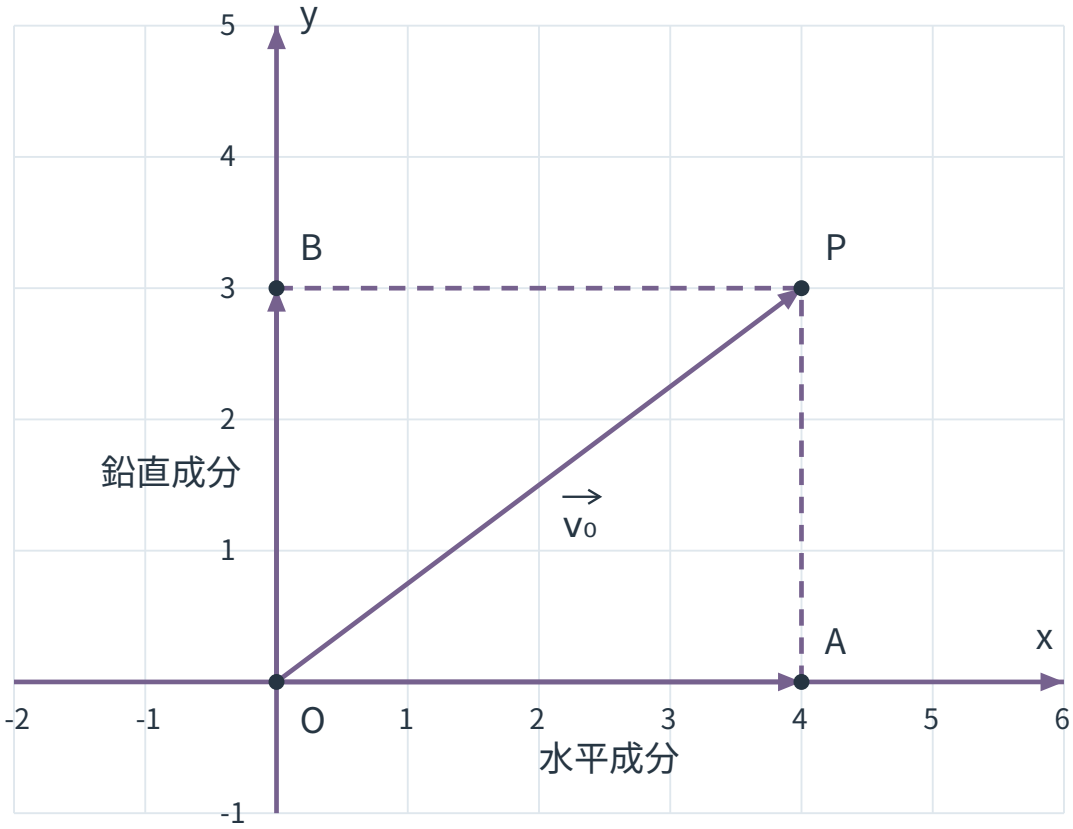
$$a_x = 0, \qquad a_y = -g$$

したがって、斜方投射も水平・鉛直の二つの成分で表すことができる。

3.1 初速度を水平成分と鉛直成分に分ける

初速度の大きさを v_0 とし、初速度の向きが**右向きの水平軸から上へ**測った鋭角 θ をなすとする。

このとき、初速度の水平成分と鉛直成分は、直角三角形の辺の長さの関係から求められる。



この図は速度成分を表すための図であり、ボールの位置や飛ぶ道筋を表したものではない。横軸・縦軸の数値はそれぞれ速度の成分を m/s で測ったものである。

O から P への矢印が初速度、O から A への矢印が水平成分、O から B への矢印が鉛直成分である。正の水平軸に沿う OA から、OP へ上向きに測った角を θ とする。

この数値例では水平成分が $4\,\mathrm{m/s}$、鉛直成分が $3\,\mathrm{m/s}$ であり、初速度の大きさは三平方の定理から、

$$v_0 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\,\mathrm{m/s}$$

となる。

直角三角形 OAP に注目すると、OP が斜辺、OA が角 θ に隣り合う辺、AP が向かい合う辺である。三角比の定義は、次のようになる。

$$\cos\theta = \frac{\text{隣辺の長さ}}{\text{斜辺の長さ}}$$

$$\sin\theta = \frac{\text{対辺の長さ}}{\text{斜辺の長さ}}$$

ここから、正の水平軸から角度を測る場合、

$$v_{0x} = v_0\cos\theta$$

$$v_{0y} = v_0\sin\theta$$

となる。図の数値でも $\cos\theta = \frac{4}{5}$、$\sin\theta = \frac{3}{5}$ となり、成分の長さと一致する。

角度をどこから測るか

水平成分が常に $v_0\cos\theta$ になるわけではない。

角度 θ を正の**鉛直軸から右側へ**測る場合には、水平成分が角 θ の対辺、鉛直成分が隣辺になる。このときは、

$$v_{0x} = v_0\sin\theta$$
$$v_{0y} = v_0\cos\theta$$

となる。三角比を使う前に、角度の基準となる軸を必ず確かめることが重要である。

3.2 斜方投射の位置と速度

初期位置を (x_0, y_0)、初速度の成分を $\left(v_{0x}, v_{0y}\right)$ とすると、投げてから経過時間 τ 後の位置は、

$$x = x_0 + v_{0x}\tau$$
$$y = y_0 + v_{0y}\tau - \frac{1}{2}g\tau^2$$

である。

速度成分についても、

$$v_x = v_{0x}$$
$$v_y = v_{0y} - g\tau$$

となる。斜方投射では、上昇している間は $v_y > 0$、最高点で $v_y = 0$、下降している間は $v_y < 0$ となる。

一方、水平方向の速度成分 v_x は変化しない。

3.3 最高点でボールは止まるのか

右斜め上向きに投げたボールは、上昇してから最高点に達し、その後に下降する。最高点では鉛直方向の動きが上向きから下向きへ変わるため、その瞬間の鉛直速度は 0 になる。

$$v_y = v_{0y} - g\tau = 0$$

したがって、最高点に達するまでの経過時間は、初速度の鉛直成分が正のとき、

$$\tau = \frac{v_{0y}}{g}$$

となる。

しかし、ここで 0 になるのは鉛直速度だけである。水平方向の速度は変化しないため、$v_{0x} \neq 0$ なら最高点でもボールは水平に進み続ける。

速度成分と速さ

速度の水平成分を v_x、鉛直成分を v_y とすると、速度の大きさ、すなわち速さ v は、

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

である。

速度成分には向きに対応した正負の符号があるが、速さは 0 以上の量である。直交する二つの成分を単純に足して速さとすることはできない。

最高点では $v_y = 0$ なので、

$$v = |\, v_x \,|$$

となる。

最高点でも加速度は変化せず、水平方向が 0、鉛直方向が $-g$ のままである。鉛直速度が一瞬 0 になったことと、鉛直加速度が 0 になることは別である。

3.4 軌道と同じ時刻の関係

地面上の点 $(0, 0)$ から、初速度の水平成分を $10\,\mathrm{m/s}$、鉛直成分を $10\,\mathrm{m/s}$ として投げる。重力加速度の大きさを $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

経過時間 τ を s、位置 x, y を m で測った数値とすると、

$$x = 10\tau$$

$$y = 10\tau - 5\tau^2$$

となる。この二つの式から経過時間を消去すると、軌道は $y = x - 0.05x^2$ で表される。



図 3　横軸 x と縦軸 y は m で測った位置。A から H、B へ同じ 1 秒間隔で進む

図の A は投げた瞬間、H は最高点、B は再び地面の高さに戻った瞬間の位置である。

同じ経過時間ごとの値を調べると、次のようになる。

経過時間 τ（s）	x（m）	y（m）	v_x（m/s）	v_y（m/s）
0	0	0	10	10
1	10	5	10	0
2	20	0	10	-10

最高点 H に対応する $\tau = 1\,\mathrm{s}$ では、鉛直速度は $0\,\mathrm{m/s}$、水平速度は $10\,\mathrm{m/s}$ である。したがって、このときの速さは $10\,\mathrm{m/s}$ であり、止まってはいない。

A から H へ向かう間は上昇し、H から B へ向かう間は下降する。ただし、空間の軌道図では横軸と縦軸の表示倍率が必ずしも等しくないため、画面上の曲線の傾きから初速度の角度を直接読み取ってはならない。初速度の角度は、速度成分と角度の定義から判断する。

4. 着地する高さで運動の条件が変わる

4.1 投げた高さへ戻る場合

初期高さと着地する高さが同じである場合を考える。初期位置を $(0, y_0)$ とし、初速度の鉛直成分を $v_{0y} > 0$ とする。

鉛直位置は、

$$y = y_0 + v_{0y}\tau - \frac{1}{2}g\tau^2$$

である。同じ高さ $y = y_0$ に戻る条件を代入すると、

$$0 = v_{0y}\tau - \frac{1}{2}g\tau^2$$

となる。右辺を因数分解すると、

$$0 = \tau\left(v_{0y} - \frac{1}{2}g\tau\right)$$

であり、二つの根は、

$$\tau = 0, \qquad \tau = \frac{2v_{0y}}{g}$$

となる。

$\tau = 0$ は投げた瞬間にその高さにいたことを表す。$v_{0y} > 0$ なので、もう一つの正の根が、後で同じ高さへ戻る時刻に対応する。

したがって、途中で障害物などに衝突せず、同じ高さへ戻るまで理想的な投射運動が続く場合、その高さへ戻るまでの時間は、

$$\tau = \frac{2v_{0y}}{g}$$

である。

その間の水平変位は、

$$\Delta x = v_{0x}\frac{2v_{0y}}{g}$$

となる。これは同じ高さに戻るという条件から得た関係であり、着地する高さが違う場合にそのまま使うことはできない。

例題 2

地面上の点 $(0,0)$ から、ボールを右斜め上向きに投げた。初速度の水平成分は $12\,\mathrm{m/s}$、鉛直成分は $10\,\mathrm{m/s}$ である。

空気抵抗を無視し、重力加速度の大きさを $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。地面は $y=0$、投げた瞬間を $\tau=0$ とする。

(1) 最高点に達するまでの時間と、最高点の高さを求めよ。

(2) 最高点でのボールの速さと加速度の水平・鉛直成分を求めよ。

(3) 再び地面に到達するまでの時間と、その間の水平変位を求めよ。

解答・解説

この運動の初期位置は $(0,0)$ であり、$v_{0x}=12\,\mathrm{m/s}$、$v_{0y}=10\,\mathrm{m/s}$ である。

(1) 最高点では鉛直速度が 0 になるため、

$$0 = 10 - 10\tau$$

より、

$$\tau = 1\,\mathrm{s}$$

である。

鉛直位置の式に代入すると、

$$y = 10\times 1 - 5\times 1^2 = 5\,\mathrm{m}$$

となる。よって、**最高点までの時間は** $1\,\mathrm{s}$**、最高点の高さは** $5\,\mathrm{m}$ である。

(2) 最高点での速度成分は、

$$v_x = 12\,\mathrm{m/s}, \qquad v_y = 0\,\mathrm{m/s}$$

である。したがって、速さは、

$$v = \sqrt{12^2+0^2} = 12\,\mathrm{m/s}$$

となる。

加速度は運動中ずっと変わらないため、**水平成分** $0\,\mathrm{m/s^2}$**、鉛直成分** $-10\,\mathrm{m/s^2}$ である。

(3) 出発点と着地点は同じ高さなので、

$$\tau = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2 \times 10}{10} = 2\,\mathrm{s}$$

となる。水平変位は、

$$\Delta x = 12 \times 2 = 24\,\mathrm{m}$$

である。

よって、**再び地面に到達するまでの時間は** $2\,\mathrm{s}$**、水平変位は右向きに** $24\,\mathrm{m}$ である。

4.2 投げた高さと着地する高さが違う場合

高い場所から右斜め上向きに投げたボールは、上昇して最高点を通った後、投げた高さを通過してさらに下の地面へ落ちることがある。

このとき、最高点までの時間は鉛直速度が 0 になる条件から求められる。しかし、地面に到達する時刻は、地面の高さ $y = 0$ を鉛直位置の式に代入して求めなければならない。

数式を解いて根が複数得られた場合でも、すべてが今回の運動を表すとは限らない。経過時間が $\tau \geq 0$ であり、投げた後から最初の着地までの運動区間に入っているかを確認する必要がある。

例題 3

地面から $15\,\mathrm{m}$ の高さにある点 $(0, 15\,\mathrm{m})$ から、ボールを右斜め上向きに投げた。初速度の水平成分は $8\,\mathrm{m/s}$、鉛直成分は $10\,\mathrm{m/s}$ である。

空気抵抗を無視し、重力加速度の大きさを $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。地面は $y = 0$、投げた瞬間を $\tau = 0$ とする。

(1) 最高点に達するまでの時間と、そのときの地面からの高さを求めよ。

(2) 地面に到達するまでの時間を求めよ。

(3) 地面に到達するまでの水平変位を求めよ。

解答・解説

(1) 最高点では鉛直速度が 0 なので、

$$0 = 10 - 10\tau$$

より、

$$\tau = 1\,\mathrm{s}$$

である。鉛直位置は、τ を s、y を m で測った数値として、

$$y = 15 + 10\tau - 5\tau^2$$

と表される。最高点での高さは、

$$y = 15 + 10 \times 1 - 5 \times 1^2 = 20\,\mathrm{m}$$

となる。

よって、**最高点までの時間は** $1\,\mathrm{s}$**、最高点の地面からの高さは** $20\,\mathrm{m}$ である。

(2) 地面に到達するとき $y = 0$ だから、

$$0 = 15 + 10\tau - 5\tau^2$$

となる。両辺を -5 で割ると、

$$\tau^2 - 2\tau - 3 = 0$$

である。因数分解すると、

$$(\tau - 3)(\tau + 1) = 0$$

より、

$$\tau = 3, \qquad \tau = -1$$

を得る。経過時間が負になる根は今回の投射後の運動には対応しないため、地面に到達するまでの時間は $3\,\mathrm{s}$ である。

(3) 同じ経過時間を水平位置の式に代入する。

$$\Delta x = 8 \times 3 = 24\,\mathrm{m}$$

したがって、水平変位は **右向きに** $24\,\mathrm{m}$ となる。

なお、$2\frac{v_{0y}}{g}$ を計算すると $2\,\mathrm{s}$ になるが、これは投げたときと同じ高さに戻るまでの時間である。この例では地面が投げた位置より $15\,\mathrm{m}$ 低いため、地面への到達時間には使えない。

4.3 空気抵抗がある実際の運動

ここまでの式では、空気抵抗を無視した。実際のボールには空気抵抗が働くため、投げた後の水平速度が一定とは限らず、上昇・下降の様子や着地点も理想的な計算結果から変わり得る。

空気抵抗の大きさや向きは物体の形、動き方などに関係するため、単純に水平投射や斜方投射の式へ一つの一定値を追加すればよいわけではない。本講では抵抗の詳しい計算を扱わず、**どの条件を理想化した結果なのか**を判断できるようにする。

また、投射運動の式は最初の着地までを対象としている。数学的な式を着地後の時刻まで延長しても、地面との衝突後の運動を表しているとは限らない。

演習問題

演習 1

時刻 $t_0 = 3\,\mathrm{s}$ に、地面から $12\,\mathrm{m}$ の高さにある点 $(2\,\mathrm{m}, 12\,\mathrm{m})$ からボールを右向きに $4\,\mathrm{m/s}$ で水平投射した。

右向きを x の正、上向きを y の正とする。地面は $y = 0$ であり、空気抵抗を無視する。重力加速度の大きさは $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

時刻 $t = 4\,\mathrm{s}$ について、次の問いに答えよ。ただし、この時刻までにボールは地面へ到達していない。

(1) 投げてからの経過時間を求めよ。

(2) この時刻の水平位置 x と鉛直位置 y を求めよ。

(3) 投げた瞬間からこの時刻までの水平変位と鉛直変位を求めよ。

(4) この時刻の速度の水平成分、鉛直成分、および速さを求めよ。速さは平方根を用いて表してよい。

演習 2

地面から同じ高さ $20\,\mathrm{m}$ にある二つの点から、ボール A とボール B を同時に水平投射した。どちらも初速度の鉛直成分は 0 である。

A の水平速度は右向きに $4\,\mathrm{m/s}$、B の水平速度は右向きに $8\,\mathrm{m/s}$ とする。

どちらも投げた位置の真下をそれぞれ水平位置 $x = 0$ とし、地面を $y = 0$ とする。空気抵抗を無視し、重力加速度の大きさは $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1) A と B が地面に到達するまでの時間を、それぞれ求めよ。

(2) A と B が着地するまでの水平変位を、それぞれ求めよ。

(3) A と B が同じ時間で地面に到達する理由を、固定された条件と運動の式を使って説明せよ。

(4) B だけ投げる高さを $45\,\mathrm{m}$ に変更し、初速度の水平成分と鉛直成分はそのままとする。この場合、A と B の到達時間は等しいか。理由とともに答えよ。

©ミライコーチング

演習 3

水平な地面上の点 $(0,0)$ から、ボールを右斜め上向きに、初速度の大きさ $20\,\mathrm{m/s}$ で投げる。初速度は**正の水平軸から上向きに** 30° の角をなす。

空気抵抗を無視し、重力加速度の大きさを $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。地面は $y=0$、投げた瞬間を $\tau=0$ とする。

必要なら次の値を用いよ。

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(1) 初速度の水平成分と鉛直成分を求めよ。

(2) 最高点に達するまでの時間と、最高点の高さを求めよ。

(3) 再び地面へ到達するまでの時間と、その間の水平変位を求めよ。

(4) 最高点での速さを求めよ。

演習 4

水平な地面上の点 $(0,0)$ から、ボールを右斜め上向きに、初速度の大きさ $10\,\mathrm{m/s}$ で投げた。

この問題では、初速度の向きが**正の鉛直軸から右側へ** 30° の角をなすものとする。

空気抵抗を無視し、重力加速度の大きさを $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。必要なら次の値を用いよ。

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(1) 初速度の水平成分と鉛直成分を求めよ。

(2) 最高点に達するまでの時間を求めよ。

(3) 最高点での速さを求めよ。

(4) 「初速度の水平成分は、角度の基準に関係なく必ず $v_0\cos\theta$ である」という説明が正しくない理由を述べよ。

演習 5

地面から $20\,\mathrm{m}$ の高さにある点 $(0,20\,\mathrm{m})$ から、ボールを右斜め上向きに投げた。初速度の水平成分は $6\,\mathrm{m/s}$、鉛直成分は $15\,\mathrm{m/s}$ である。

地面を $y=0$、投げた瞬間を $\tau=0$ とする。空気抵抗を無視し、重力加速度の大きさを $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1) 鉛直位置を経過時間 τ で表す式を求めよ。

(2) 地面に到達するまでの時間を求めよ。得られた根のうち、どれを採用するかも説明せよ。

(3) 地面に到達するまでの水平変位を求めよ。

(4) この問題で、$2\frac{v_{0y}}{g}$ を地面に到達するまでの時間としてそのまま使えない理由を説明せよ。

©ミライコーチング

演習 6

空気抵抗を無視し、重力加速度の大きさを $10\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

地面上の点 $(0, 0)$ から、初速度の水平成分 $10\,\mathrm{m/s}$、鉛直成分 $10\,\mathrm{m/s}$ で、ボールを右斜め上向きに投げた。地面を $y = 0$、投げた瞬間を $\tau = 0$ とする。

(1) 最高点で鉛直速度が 0 になることは、ボールの速さも 0 になることを意味するか。理由とともに答えよ。

(2) 最高点での加速度の水平成分と鉛直成分を求めよ。

(3) ボールが最初に地面へ到達した後にも、投射運動の式だけを使って実際の位置を求め続けてよいか。理由を説明せよ。

(4) 空気抵抗が無視できない場合、水平方向の速度と軌道について、理想的な投射運動と異なり得る点を説明せよ。

演習問題の解答・解説

解答 1

(1) 投げた時刻と観察する時刻の差が経過時間である。

$$\tau = t - t_0 = 4 - 3 = 1\,\mathrm{s}$$

よって、経過時間は $1\,\mathrm{s}$ である。

(2) 初期位置は $(2\,\mathrm{m}, 12\,\mathrm{m})$、初速度の成分は $v_{0x} = 4\,\mathrm{m/s}$、$v_{0y} = 0$ である。
水平方向の位置は、

$$x = 2 + 4 \times 1 = 6\,\mathrm{m}$$

となる。鉛直方向の位置は、

$$y = 12 + 0 \times 1 - \frac{1}{2} \times 10 \times 1^2 = 7\,\mathrm{m}$$

である。
したがって、時刻 $t = 4\,\mathrm{s}$ における位置は $(6\,\mathrm{m}, 7\,\mathrm{m})$ となる。

(3) 変位は、観察時刻の位置から初期位置を引いて求める。

$$\Delta x = 6 - 2 = +4\,\mathrm{m}$$
$$\Delta y = 7 - 12 = -5\,\mathrm{m}$$

よって、**水平変位は** $+4\,\mathrm{m}$**、鉛直変位は** $-5\,\mathrm{m}$ である。
水平変位の正の符号は右向き、鉛直変位の負の符号は下向きを表す。

(4) 水平速度は一定なので、

$$v_x = 4\,\mathrm{m/s}$$

である。鉛直速度は、

$$v_y = 0 - 10 \times 1 = -10\,\mathrm{m/s}$$

となる。

速さは、二つの直交する速度成分から、

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{4^2 + (-10)^2} \\ &= \sqrt{116} \\ &= 2\sqrt{29}\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

と求められる。

したがって、**水平速度成分は** $+4\,\mathrm{m/s}$**、鉛直速度成分は** $-10\,\mathrm{m/s}$**、速さは** $2\sqrt{29}\,\mathrm{m/s}$ である。

速さは約 $10.8\,\mathrm{m/s}$ となる。鉛直速度が負であることは、速さが負であることを意味しない。

解答 2

(1) 両方のボールについて、初期高さは $20\,\mathrm{m}$、初速度の鉛直成分は 0 である。したがって、鉛直位置は共通して、τ を s、y を m で測った数値として、

$$y = 20 - 5\tau^2$$

となる。

地面に到達するとき $y = 0$ なので、

$$\begin{aligned} 0 &= 20 - 5\tau^2 \\ \tau^2 &= 4 \end{aligned}$$

となる。$\tau \geq 0$ を満たす根は $\tau = 2$ である。

よって、**A も B も地面に到達するまでの時間は** $2\,\mathrm{s}$ である。

(2) A の水平変位は、

$$\Delta x_{\mathrm{A}} = 4 \times 2 = 8\,\mathrm{m}$$

となる。B の水平変位は、

$$\Delta x_{\mathrm{B}} = 8 \times 2 = 16\,\mathrm{m}$$

である。

したがって、**A は右向きに** $8\,\mathrm{m}$**、B は右向きに** $16\,\mathrm{m}$ 移動して地面に到達する。

(3) A と B では、初期高さ、初速度の鉛直成分、重力加速度、着地する高さが同じである。
鉛直位置の式、

$$y = y_0 + v_{0y}\tau - \frac{1}{2}g\tau^2$$

には水平速度が含まれていない。そのため、水平速度だけが異なっても、同じ高さの地面に到達するまでの時間は変わらない。

(4) 到達時間は等しくならない。
B の初期高さを $45\,\mathrm{m}$ に変えると、鉛直位置は、

$$y = 45 - 5\tau^2$$

となる。地面に達する条件 $y = 0$ から、

$$\tau^2 = 9$$

であり、正の根を選ぶと、B の到達時間は $3\,\mathrm{s}$ となる。
A は $2\,\mathrm{s}$ のままである。初期高さという条件を変えたため、同じ到達時間になるとはいえない。

解答 3

(1) 初速度の向きは正の水平軸から 30° 上向きなので、

$$v_{0x} = v_0 \cos 30^\circ$$

となる。値を代入すると、

$$v_{0x} = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$$

である。
鉛直成分は、

$$v_{0y} = v_0 \sin 30^\circ = 20 \times \frac{1}{2} = 10\,\mathrm{m/s}$$

である。
よって、**水平成分は** $10\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$**、鉛直成分は** $10\,\mathrm{m/s}$ である。

(2) 最高点で $v_y = 0$ となるため、

$$0 = 10 - 10\tau$$

より、

$$\tau = 1\,\mathrm{s}$$

となる。
このとき、鉛直位置は、

$$y = 10 \times 1 - 5 \times 1^2 = 5\,\mathrm{m}$$

である。
したがって、**最高点までの時間は** $1\,\mathrm{s}$**、最高点の高さは** $5\,\mathrm{m}$ となる。

(3) 投げた高さと着地する高さが同じなので、再び地面に到達する時刻は、

$$\tau = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2 \times 10}{10} = 2\,\mathrm{s}$$

となる。

その間の水平変位は、

$$\Delta x = 10\sqrt{3} \times 2 = 20\sqrt{3}\,\mathrm{m}$$

である。

よって、**到達時間は** $2\,\mathrm{s}$**、水平変位は右向きに** $20\sqrt{3}\,\mathrm{m}$ となる。

(4) 最高点では鉛直速度は 0 だが、水平速度は変化しない。したがって、

$$v = \sqrt{\left(10\sqrt{3}\right)^2 + 0^2}$$

$$= 10\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$$

である。

最高点でも右向きに進んでいるため、速さは 0 ではない。

解答 4

(1) この問題では角度が正の鉛直軸から右側へ測られている。したがって、水平成分が角 30° の対辺、鉛直成分が隣辺に対応する。

水平成分は、

$$v_{0x} = 10\sin 30^\circ = 10 \times \frac{1}{2} = 5\,\mathrm{m/s}$$

である。

鉛直成分は、

$$v_{0y} = 10\cos 30^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$$

となる。

よって、**水平成分は** $5\,\mathrm{m/s}$**、鉛直成分は** $5\sqrt{3}\,\mathrm{m/s}$ である。

(2) 最高点では鉛直速度が 0 になるので、

$$0 = 5\sqrt{3} - 10\tau$$

となる。したがって、

$$\tau = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{s}$$

である。

(3) 最高点では鉛直速度が 0 であり、水平速度は $5\,\mathrm{m/s}$ のままである。

したがって、最高点での速さは $5\,\mathrm{m/s}$ となる。

(4) $\sin\theta$ と $\cos\theta$ のどちらを使うかは、角度の基準軸と、求める成分が直角三角形の隣辺・対辺のどちらに対応するかで決まるためである。

今回は鉛直軸から角度を測っているので、水平成分には $\sin\theta$ を使う。水平成分に常に $\cos\theta$ を使うという説明は正しくない。

解答 5

(1) 鉛直方向の位置の式は、

$$y = y_0 + v_{0y}\tau - \frac{1}{2}g\tau^2$$

である。

与えられた $y_0 = 20\,\mathrm{m}$、$v_{0y} = 15\,\mathrm{m/s}$、$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ を代入すると、

$$y = 20 + 15\tau - 5\tau^2$$

となる。ただし、y は m、τ は s で測った数値である。

(2) 地面に到達するとき $y = 0$ なので、

$$0 = 20 + 15\tau - 5\tau^2$$

となる。両辺を -5 で割ると、

$$\tau^2 - 3\tau - 4 = 0$$

である。

これを因数分解すると、

$$(\tau - 4)(\tau + 1) = 0$$

より、

$$\tau = 4, \qquad \tau = -1$$

を得る。

投げてからの経過時間は $\tau \geq 0$ である。負の根は今回の投射後の運動に対応しないため、$\tau = 4$ を採用する。

よって、**地面に到達するまでの時間は** $4\,\mathrm{s}$ である。

(3) 水平速度は一定なので、

$$\Delta x = v_{0x}\tau = 6 \times 4 = 24\,\mathrm{m}$$

となる。

したがって、水平変位は **右向きに** $24\,\mathrm{m}$ である。

(4) $2\frac{v_{0y}}{g}$ は、投げた高さと同じ高さに戻るまでの時間として導いた式だからである。
この問題で計算すると、

$$\frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2 \times 15}{10} = 3\,\mathrm{s}$$

となるが、この時刻は投げた高さ $20\,\mathrm{m}$ に戻る時刻であり、地面に到達する時刻ではない。
実際、$\tau = 3\,\mathrm{s}$ を鉛直位置の式へ代入すると、

$$y = 20 + 15 \times 3 - 5 \times 3^2 = 20\,\mathrm{m}$$

である。
したがって、地面に到達する時間を求めるには、着地条件 $y = 0$ を使う必要がある。

解答 6

(1) 意味しない。
最高点では鉛直方向の速度成分 v_y は 0 になるが、水平方向の速度成分は $v_x = 10\,\mathrm{m/s}$ のままである。
したがって、最高点の速さは、

$$v = \sqrt{10^2 + 0^2} = 10\,\mathrm{m/s}$$

となる。
最高点では鉛直方向の運動が上昇から下降へ変わるが、ボールは水平方向には動き続けている。

(2) 空気抵抗を無視した投射運動では、最高点でも加速度は変わらない。
したがって、**加速度の水平成分は** $0\,\mathrm{m/s^2}$**、鉛直成分は** $-10\,\mathrm{m/s^2}$ である。
鉛直速度が一瞬 0 になることと、鉛直加速度が 0 になることは別である。

(3) 実際の位置を求め続けてよいとはいえない。
投射運動の式は、ボールが空中を運動している間の条件から導かれたものである。地面に到達して衝突すると、速度や運動の条件が変わる。
この問題では、初期高さと着地する高さが同じなので、最初に地面へ戻る経過時間は、

$$\tau = \frac{2 \times 10}{10} = 2\,\mathrm{s}$$

である。
それ以降は、地面との衝突やその後の運動を考えずに投射運動の式だけを延長しても、実際の位置を表すことはできない。

(4) 空気抵抗が無視できない場合、水平速度が一定とは限らない。また、鉛直方向にも重力だけを考えた場合とは異なる変化が生じる。
そのため、実際の軌道や到達時間、着地点は、空気抵抗を無視して計算した場合と異なり得る。
したがって、本講の式を利用するときには、**空気抵抗を無視できること、重力加速度を一定とみなせること、最初の着地までの運動であること**を確認する必要がある。