

第 15 講 命題・必要条件・十分条件・対偶

学習目標

- 命題の意味を理解し、真か偽かを判断できる。
- 「 p ならば q 」という命題で、仮定と結論を区別できる。
- 十分条件と必要条件を、矢印の向きから判断できる。
- 命題の逆と対偶をつくり、元の命題と対偶の関係を説明できる。
- 偽である命題に対して、反例を 1 つ示せる。

命題は「正しいか、正しくないかを決められる文」

数学では真偽をはっきりさせる

「8は偶数である」という文は正しいと判断できます。
一方、「7は偶数である」という文は正しくないと判断できます。
このように、正しいか正しくないかを明確に判断できる文を**命題**といいます。
正しい命題を**真である**、正しくない命題を**偽である**といいます。

たとえば、

- 「12は3の倍数である」は真。
- 「10は4の倍数である」は偽。

です。

数学では、もっともらしく見えるかどうかではなく、条件を満たすすべての場合について正しいかを確認します。

命題

正しいか正しくないかが明確に定まる文を**命題**といいます。

命題が正しいとき、その命題は**真である**といいます。

命題が正しくないとき、その命題は**偽である**といいます。

1 つでも成り立たない例があれば偽

「すべての整数について成り立つ」と主張する命題は、1 つでも成り立たない例が見つければ偽です。

たとえば、「整数 n が奇数ならば、 $n+1$ も奇数である」は偽です。

実際、 $n=3$ とすると $n+1=4$ であり、4 は偶数です。

このように、命題が偽であることを示す具体例を**反例**といいます。

「 p ならば q 」という命題

条件から結論へ進む

数学では、命題を

「 p ならば q 」

という形で表すことがよくあります。

これを記号で、

$$p \Rightarrow q$$

と表します。

p は出発点となる条件であり、**仮定**といいます。

q はそこから導きたい内容であり、**結論**といいます。

たとえば、

「整数 n が 4 の倍数ならば、 n は偶数である」

という命題では、

- p : n は 4 の倍数である
- q : n は偶数である

です。

仮定と結論

命題 $p \Rightarrow q$ において、 p を**仮定**、 q を**結論**といいます。

矢印には向きがある

$p \Rightarrow q$ が真であっても、

$$q \Rightarrow p$$

が真とは限りません。

「4 の倍数ならば偶数である」は真ですが、「偶数ならば 4 の倍数である」は偽です。

たとえば 6 は偶数ですが、4 の倍数ではありません。

命題では、条件を入れ替えると別の命題になることを意識します。

十分条件と必要条件

矢印の出発点と到着点を見る

$p \Rightarrow q$ が真であるとします。

p が成り立てば、それだけで q が成り立つことが保証されます。

この意味で、 p は q が成り立つための**十分条件**です。

一方、 p が成り立つならば必ず q も成り立つので、 p が成り立つためには q が必要です。
この意味で、 q は p が成り立つための**必要条件**です。

十分条件・必要条件

$p \Rightarrow q$ が真であるとき、
• p は q であるための**十分条件**
• q は p であるための**必要条件**
といいます。

矢印で判断する

命題

$$p \Rightarrow q$$

が真なら、矢印の出発点 p が十分条件、矢印の到着点 q が必要条件です。
「十分・必要」という言葉だけを暗記するより、矢印を書いて判断すると取り違えにくくなります。

倍数で考える

整数 n について、
• $p: n$ は 6 の倍数
• $q: n$ は 3 の倍数
とします。
6 の倍数は必ず 3 の倍数なので、

$$p \Rightarrow q$$

は真です。
したがって、「 n が 6 の倍数であること」は「 n が 3 の倍数であること」の十分条件です。
また、「 n が 3 の倍数であること」は「 n が 6 の倍数であること」の必要条件です。

必要十分条件

両方向に矢印が通る場合

$p \Rightarrow q$ だけでなく、 $q \Rightarrow p$ も真になることがあります。
たとえば、整数 n について、
• $p: n$ は偶数である
• $q: n^2$ は偶数である
とします。
 n が偶数ならば n^2 も偶数です。
反対に、 n^2 が偶数ならば n も偶数です。
このように両方向の命題がともに真であるとき、 p と q は互いに必要でもあり、十分でもあります。

必要十分条件

$p \Rightarrow q$ と $q \Rightarrow p$ がともに真であるとき、 p は q であるための**必要十分条件**であるといいます。
この関係を、

$$p \Leftrightarrow q$$

と表します。

命題の逆

逆
命題

$$p \Rightarrow q$$

に対して、仮定と結論を入れ替えた

$$q \Rightarrow p$$

を、元の命題の**逆**といいます。

元の命題が真でも逆が真とは限らない

「 n が 4 の倍数ならば、 n は偶数である」という命題は真です。
その逆は、
「 n が偶数ならば、 n は 4 の倍数である」
です。
これは $n = 6$ を考えれば成り立ちません。
したがって、元の命題が真であっても、その逆が真であるとは限りません。
逆を調べるときは、元の命題とは別に真偽を判断する必要があります。

命題の対偶

成り立たない側から考える

$p \Rightarrow q$ に対して、
「 q でないならば、 p でない」
という命題を考えます。
これが元の命題の対偶です。
たとえば、
「整数 n が 4 の倍数ならば、 n は偶数である」
の対偶は、
「整数 n が偶数でないならば、 n は 4 の倍数ではない」
です。
つまり、
「 n が奇数ならば、 n は 4 の倍数ではない」
となります。

対偶

命題 $p \Rightarrow q$ に対して、「 q でない」を $\text{not } q$ 、「 p でない」を $\text{not } p$ と表すと、
$$\text{not } q \Rightarrow \text{not } p$$

を元の命題の対偶といいます。

命題と対偶の真偽は一致する

命題 $p \Rightarrow q$ とその対偶は、必ず同じ真偽になります。
したがって、元の命題を直接考えにくい場合は、対偶を考えることで証明しやすくなることがあります。
一方、逆は元の命題と同じ真偽になるとは限りません。
・元の命題と対偶：真偽が一致する
・元の命題と逆：真偽が一致するとは限らない
という違いが重要です。

対偶を使って考える

整数 n について、
「 n^2 が奇数ならば、 n は奇数である」
という命題を考えます。
この対偶は、
「 n が奇数でないならば、 n^2 は奇数でない」
です。
整数では「奇数でない」は偶数なので、
「 n が偶数ならば、 n^2 は偶数である」
となります。
 $n = 2k$ と表せば、

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

となり、 n^2 は偶数です。
したがって対偶が真なので、元の命題も真です。

命題を判断する手順

真偽・条件・対偶を整理する

命題を扱うときは、次の順に整理します。

1. 仮定 p と結論 q を区別する。
2. $p \Rightarrow q$ が真か偽かを考える。
3. 偽だと思ったら、反例を 1 つ探す。
4. 十分条件・必要条件では、矢印の向きを確認する。
5. 逆では p と q を入れ替える。
6. 対偶では、 p と q をそれぞれ否定し、順序も入れ替える。

例題

例題 1

次の命題の真偽を答えなさい。偽である場合は、反例を 1 つ示しなさい。
「整数 n が 3 の倍数ならば、 n は 6 の倍数である。」

例題 1 の解答・解説

この命題は偽です。
反例として $n = 3$ を考えます。
3 は 3 の倍数ですが、6 の倍数ではありません。
したがって、「整数 n が 3 の倍数ならば、 n は 6 の倍数である」という命題は偽です。
命題を偽だと示すには、条件を満たしているのに結論を満たさない例を 1 つ見つければ十分です。

例題 2

整数 n について、次の 2 つの条件を考えます。

p : n は 8 の倍数である。

q : n は 4 の倍数である。

p と q のうち、どちらがどちらの十分条件・必要条件であるか答えなさい。

例題 2 の解答・解説

8 の倍数は必ず 4 の倍数なので、

$$p \Rightarrow q$$

は真です。

したがって、 p は q であるための十分条件です。

また、 q は p であるための必要条件です。

つまり、「 n が 8 の倍数であること」は「 n が 4 の倍数であること」の十分条件であり、「 n が 4 の倍数であること」は「 n が 8 の倍数であること」の必要条件です。

例題 3

次の命題について、逆と対偶をそれぞれ述べなさい。

「整数 n が 10 の倍数ならば、 n は偶数である。」

例題 3 の解答・解説

元の命題で、

p : 「 n は 10 の倍数である」

q : 「 n は偶数である」

とします。

逆は、仮定と結論を入れ替えるので、

「整数 n が偶数ならば、 n は 10 の倍数である。」

です。

対偶は、結論を否定したものを仮定にし、仮定を否定したものを結論にします。

したがって、

「整数 n が偶数でないならば、 n は 10 の倍数ではない。」

です。

整数について「偶数でない」は「奇数」と言い換えられるので、

「整数 n が奇数ならば、 n は 10 の倍数ではない。」

としても同じ内容です。

演習問題

練習問題 1

次の命題の真偽を答えなさい。偽である場合は、反例を 1 つ示しなさい。

- (1) 「整数 n が 5 の倍数ならば、 n は整数である。」
- (2) 「整数 n が偶数ならば、 n は 4 の倍数である。」
- (3) 「整数 n が 12 の倍数ならば、 n は 3 の倍数である。」

練習問題 2

次の命題について、仮定と結論をそれぞれ答えなさい。

「整数 n が 6 の倍数ならば、 n は 2 の倍数である。」

練習問題 3

整数 n について、

p : n は 10 の倍数である。

q : n は 5 の倍数である。

とする。

p と q のうち、どちらがどちらの十分条件・必要条件であるか答えなさい。

練習問題 4

整数 n について、

p : n は偶数である。

q : $n + 1$ は奇数である。

とする。

$p \Rightarrow q$ と $q \Rightarrow p$ の真偽をそれぞれ答え、 p と q の関係を述べなさい。

練習問題 5

次の命題の逆を述べ、その真偽を答えなさい。偽である場合は反例を 1 つ示しなさい。

「整数 n が 6 の倍数ならば、 n は 3 の倍数である。」

練習問題 6

次の命題の対偶を述べなさい。
「整数 n が 4 の倍数ならば、 n は偶数である。」

練習問題 7

次の命題が真であることを、対偶を利用して示しなさい。
「整数 n について、 n^2 が偶数ならば、 n は偶数である。」

練習問題 8

ある生徒が、
「命題 $p \Rightarrow q$ が真ならば、その逆 $q \Rightarrow p$ も必ず真である」
と考えました。
この考えが誤っていることを、具体的な命題と反例を使って説明しなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

(1) 真です。
問題では最初から n を整数としているため、 n が 5 の倍数ならば当然 n は整数です。
(2) 偽です。
反例として $n = 2$ を考えます。
2 は偶数ですが、4 の倍数ではありません。
(3) 真です。
12 の倍数は $12k$ と表せます。 $12k = 3(4k)$ なので、必ず 3 の倍数です。
したがって、順に「真、偽、真」です。

練習問題 2 の解答・解説

命題は、
「整数 n が 6 の倍数ならば、 n は 2 の倍数である。」
です。
「ならば」より前が仮定なので、仮定は「 n は 6 の倍数である」です。
「ならば」より後が結論なので、結論は「 n は 2 の倍数である」です。

練習問題 3 の解答・解説

10 の倍数は必ず 5 の倍数なので、 $p \Rightarrow q$ は真です。
したがって、 p は q であるための十分条件です。
また、 q は p であるための必要条件です。
つまり、「 n が 10 の倍数であること」が十分条件、「 n が 5 の倍数であること」が必要条件です。

練習問題 4 の解答・解説

n が偶数ならば、ある整数 k を使って $n = 2k$ と表せます。
このとき、 $n + 1 = 2k + 1$ なので、 $n + 1$ は奇数です。
したがって、 $p \Rightarrow q$ は真です。
反対に、 $n + 1$ が奇数ならば、ある整数 k を使って、 $n + 1 = 2k + 1$ と表せます。
両辺から 1 を引くと、 $n = 2k$ なので、 n は偶数です。
したがって、 $q \Rightarrow p$ も真です。
両方向がともに真なので、 p と q は互いに必要十分条件です。
つまり、 $p \Leftrightarrow q$ が成り立ちます。

練習問題 5 の解答・解説

元の命題は、
「整数 n が 6 の倍数ならば、 n は 3 の倍数である。」
です。
逆では仮定と結論を入れ替えるので、
「整数 n が 3 の倍数ならば、 n は 6 の倍数である。」
となります。
この逆は偽です。
反例として $n = 3$ を考えると、3 は 3 の倍数ですが、6 の倍数ではありません。

練習問題 6 の解答・解説

元の命題で、
 p : 「 n は 4 の倍数である」
 q : 「 n は偶数である」
とします。
対偶は、「 q でないならば p でない」です。
したがって、
「整数 n が偶数でないならば、 n は 4 の倍数ではない。」
です。
整数について「偶数でない」は「奇数」なので、
「整数 n が奇数ならば、 n は 4 の倍数ではない。」
と表しても構いません。

練習問題 7 の解答・解説

元の命題は、
「 n^2 が偶数ならば、 n は偶数である。」
です。
この対偶は、
「 n が偶数でないならば、 n^2 は偶数でない。」
です。
整数について考えているので、
「 n が奇数ならば、 n^2 は奇数である。」
と言い換えられます。
 n が奇数ならば、ある整数 k を使って、

$$n = 2k + 1$$

と表せます。
このとき、

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k + 1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

です。
 $2k^2 + 2k$ は整数なので、 n^2 は奇数です。
したがって対偶は真です。
命題とその対偶の真偽は一致するので、元の命題「 n^2 が偶数ならば、 n は偶数である」も真です。

練習問題 8 の解答・解説

具体例として、
「整数 n が 4 の倍数ならば、 n は偶数である。」
という命題を考えます。
4 の倍数は必ず偶数なので、この命題は真です。
この命題の逆は、
「整数 n が偶数ならば、 n は 4 の倍数である。」
です。
しかし、 $n = 6$ とすると、6 は偶数ですが 4 の倍数ではありません。
したがって、逆は偽です。
この例から、元の命題が真であっても、その逆が必ず真になるわけではないことが分かります。