

第 128 講 接線の方程式

学習目標

この講では、微分係数を利用して曲線上の点における接線の方程式を求められるようになることを目標とする。

具体的には、次のことができるようになる。

- ・ 接点の座標、接線の傾き、接線の方程式の関係を説明できる。
- ・ 点 $(a, f(a))$ における接線の式を、微分係数 $f'(a)$ を用いて求められる。
- ・ 与えられた点が接点なのか、接線が通る外部の点なのかを区別して考えられる。
- ・ 水平な接線も、傾きが 0 の接線として扱える。

接線を考える理由

曲線に沿った変化を、ある一点で直線として表したいことがある。その直線が接線である。

「曲線に最も近い直線」と考えると、どの距離を基準にするかが曖昧になる。接線を考えるときに重要なのは、接点での曲線の向きである。

接線は、曲線上の接点での微分係数を傾きにもつ直線として考える。

例えば、 $y = x^3$ と $y = 0$ の共有点を考えると、 $x^3 = 0$ より、共有点は原点だけである。

一方で、 $x < 0$ では $x^3 < 0$ 、 $x > 0$ では $x^3 > 0$ なので、曲線は原点の前後で横軸の上下へ移る。このことを「横切る」という。

しかし、接線かどうかは、共有点の個数や曲線を横切るかどうかでは決まらない。接点における微分係数と接線の傾きが一致することが本質である。

接線の定義

関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で有限の微分係数をもつとする。

このとき、曲線上の接点 $(a, f(a))$ を通り、傾き $f'(a)$ をもつ直線を、 $x = a$ における接線という。

したがって、接線の方程式は $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ で表される。

この式は $x = a$ のときも成り立つため、接線を求めるために $x - a$ で割る必要はない。

また、 $f'(a) = 0$ の場合は、 $y = f(a)$ となり、水平な直線も接線として扱う。

接線の式が成り立つ理由

直線の方程式は、ある点を通り、一定の傾きをもつ直線として考える。

点 $(a, f(a))$ を通る直線で、傾きが m のものは $y - f(a) = m(x - a)$ と表される。

曲線 $y = f(x)$ の $x = a$ における瞬間的な変化の割合が微分係数 $f'(a)$ であるため、接線では $m = f'(a)$ と置けばよい。

したがって、 $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

が得られる。

ここで重要なのは、接線の式を作るために $x - a$ で割る必要はないという点である。微分係数を求める過程では変化量を考えるが、接線の方程式は点と傾きから直接作ることができる。

接点と外点を混同しない

接点が $(a, f(a))$ と与えられている場合、 a は曲線上の接点の横座標である。

一方、ある点 P を通る接線を求める問題では、 P は接点とは限らない。

例えば、点 $P(0, -1)$ を通る $y = x^2$ の接線を考える場合、 P を曲線上の点として扱ってははいけない。接点を (a, a^2) と置き、その接線が P を通る条件を考える。

接線を求める基本手順

接線を求めるときは、次の順序で考える。

1. 接点を確認する。
2. 接点の座標 $(a, f(a))$ を求める。
3. 微分して傾き $f'(a)$ を求める。
4. 点傾きの式 $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ に代入する。

特に、接点の高さ $f(a)$ と傾き $f'(a)$ を混同しないことが重要である。

図 1：点での接線の見方

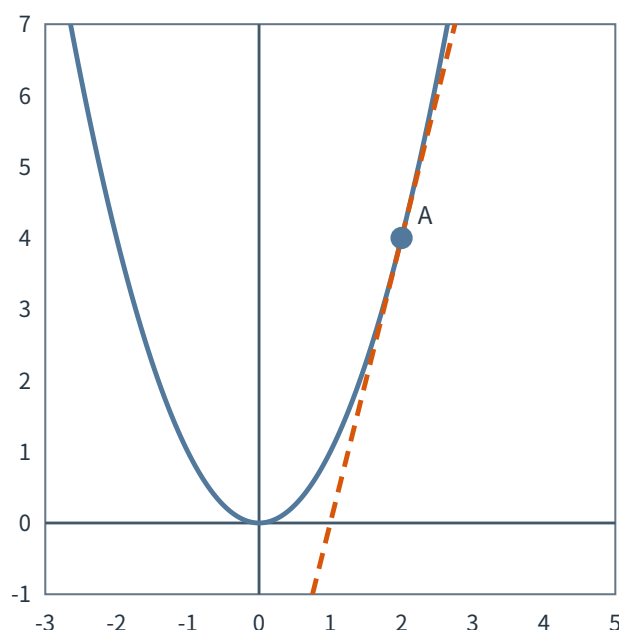


図 1 曲線の実線は $y = x^2$ 、右上がりの破線は $A(2, 4)$ における接線 $y = 4x - 4$ 。接線は A を通り、傾きは 4。横軸は x 、縦軸は y で、縦横の 1 単位の長さは等しい。

放物線 $y = x^2$ 上の点 $(2, 4)$ を考える。

この点での接線の傾きは、その点における微分係数で決まる。

$f(x) = x^2$ であるから、 $f'(x) = 2x$ となる。

したがって、 $x = 2$ における傾きは $f'(2) = 4$ である。

接点 $(2, 4)$ と傾き 4 を使うと、 $y - 4 = 4(x - 2)$ となり、 $y = 4x - 4$ を得る。

例題 1

$y = x^2$ の点 $(2, 4)$ における接線の方程式を求めよ。

例題 1 の解答・解説

関数を $f(x) = x^2$ とおく。

まず、接線の傾きを求めるために微分する。

$$f'(x) = 2x$$

接点の横座標は 2 であるから、 $f'(2) = 4$ となる。

したがって、接点 $(2, 4)$ における接線は、傾き 4 の直線である。

点傾きの式に代入すると、 $y - 4 = 4(x - 2)$

整理して、次のように計算する。

$$y - 4 = 4x - 8$$

$$y = 4x - 4$$

$f(2) = 4$ であるから、求めた直線 $y = 4x - 4$ に $x = 2$ を代入すると、 $y = 4 \cdot 2 - 4 = 4$ となり、接点 $(2, 4)$ を通ることが確認できる。

また、直線の傾きは 4 であり、 $f'(2) = 4$ と一致する。したがって、接点の通過条件と傾きの条件をともに満たしている。

よって、接線の方程式は $y = 4x - 4$ である。

水平な接線

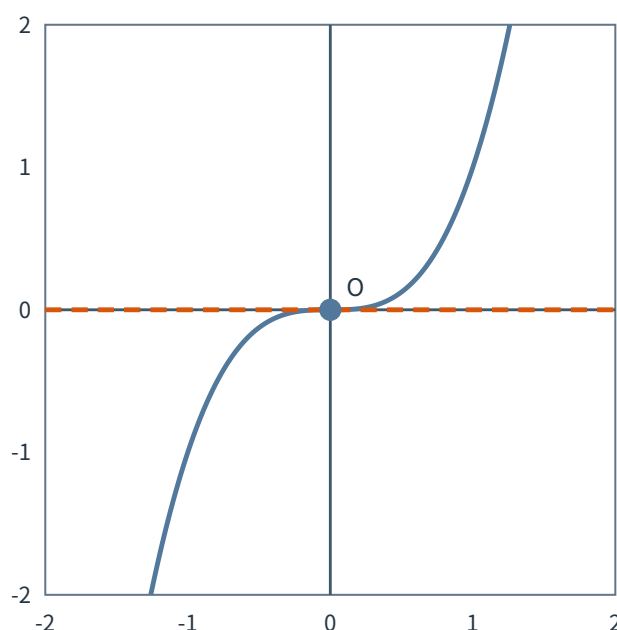


図2 曲線の実線は $y = x^3$ 、水平な破線は原点 O における接線 $y = 0$ 。この接線は x 軸と完全に重なる。曲線は原点で接線を横切り、
 $x < 0$ では接線の下、 $x > 0$ では上にある。横軸は x 、縦軸は y で、縦横の 1 単位の長さは等しい。

接線の傾きは微分係数で決まるため、微分係数が 0 の場合も接線として扱う。

例えば、 $f(x) = x^3$ では、 $f'(x) = 3x^2$ である。

原点では、 $f'(0) = 0$ となる。

したがって、原点での接線は $y - 0 = 0(x - 0)$ より、 $y = 0$ である。

この直線は横軸であり、原点での接線である。ここで注意すべきなのは、原点付近のすべての点で曲線の傾きが 0 になっているわけではないということである。

水平な接線となる理由は、原点における微分係数が

$f'(0) = 0$ であるためである。

また、 $y = x^3$ と $y = 0$ の共有点は原点だけであるが、曲線が原点で横切ることと、原点で水平な接線をもつことは両立する。

接線を判断するときは、交点の個数ではなく、その点での傾きに注目する。

例題 2

$y = x^3$ の原点における接線の方程式を求めよ。また、その接線が曲線を横切っても接線である理由を説明せよ。

例題 2 の解答・解説

関数を $f(x) = x^3$ とおく。

微分すると、 $f'(x) = 3x^2$ である。

原点の横座標は 0 なので、 $f'(0) = 0$ となる。

また、原点は $(0, 0)$ であるから、接線の式は $y - 0 = 0(x - 0)$ である。

したがって、 $y = 0$ が接線である。

この直線と $y = x^3$ の共有点を確認すると、 $x^3 = 0$ より、実数解は $x = 0$ だけである。

また、 $x < 0$ では $x^3 < 0$ 、 $x > 0$ では $x^3 > 0$ であるため、曲線は原点で横軸を横切る。

しかし、接線は「曲線を横切らない直線」ではない。原点における微分係数が 0 であり、接線の傾きと一致するため、 $y = 0$ は原点における接線である。

外点を通る接線

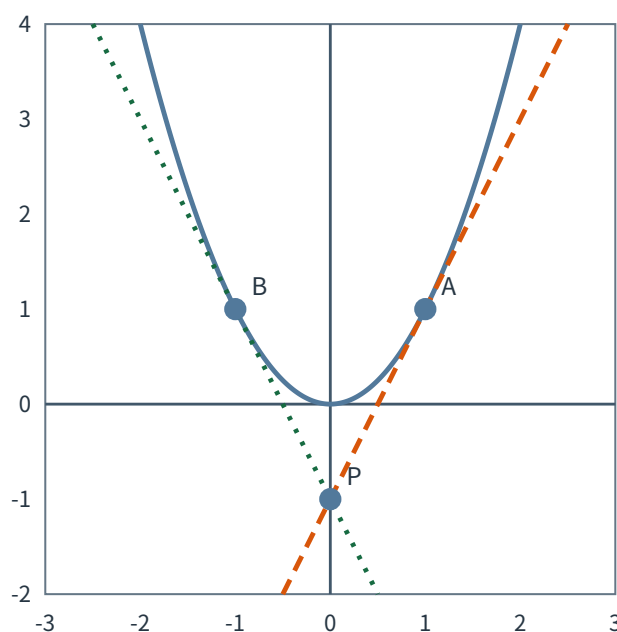


図 3 曲線の実線は $y = x^2$ 。右上がりの破線 $y = 2x - 1$ は $A(1, 1)$ で、右下がりの点線 $y = -2x - 1$ は $B(-1, 1)$ で放物線に接する。2 本とも曲線上にない点 $P(0, -1)$ を通る。P は接点ではなく、接点は A と B である。横軸は x 、縦軸は y で、縦横の 1 単位の長さは等しい。

曲線上の点ではなく、外部の点を通る接線を求める場合は、接点を未知数として置く。

$y = x^2$ の接点を (a, a^2) とおく。

このとき、 $f'(x) = 2x$ であるから、接点での傾きは $f'(a) = 2a$ となる。

したがって、接線は $y - a^2 = 2a(x - a)$ である。

整理すると、 $y = 2ax - a^2$ となる。

ここで、通過する点を接点と間違えないことが重要である。外点 P の座標は、接線が通る条件として利用する。

例題 3

点 $P(0, -1)$ を通る $y = x^2$ の接線をすべて求めよ。

例題 3 の解答・解説

接点を (a, a^2) とおく。

関数 $f(x) = x^2$ を微分すると、 $f'(x) = 2x$ であるから、接点での傾きは $f'(a) = 2a$ である。

したがって、接線の方程式は $y - a^2 = 2a(x - a)$ となる。

整理すると、 $y = 2ax - a^2$ である。

この接線が点 $P(0, -1)$ を通るので、 $x = 0, y = -1$ を代入する。

$-1 = 2a \cdot 0 - a^2$ より、 $a^2 = 1$ となる。

したがって、 $a = 1, -1$ である。

それぞれ確認する。

$a = 1$ のとき、 $y = 2x - 1$ となる。

$a = -1$ のとき、 $y = -2x - 1$ となる。

接点はそれぞれ $(1, 1), (-1, 1)$ であり、傾きは $2, -2$ である。

$a = 1$ のとき、接線は $y = 2x - 1$ であり、点 $P(0, -1)$ を代入すると成立する。また、接点 $(1, 1)$ を代入すると成立し、傾き 2 は $f'(1) = 2$ と一致する。

$a = -1$ のとき、接線は $y = -2x - 1$ であり、点 $P(0, -1)$ を代入すると成立する。また、接点 $(-1, 1)$ を代入すると成立し、傾き -2 は $f'(-1) = -2$ と一致する。

さらに、条件 $a^2 = 1$ の実数解は $a = 1, -1$ だけであるため、これ以外の接線は存在しない。

よって、求める接線は $y = 2x - 1$ と $y = -2x - 1$ である。

練習問題 1

$y = x^3 - 2x$ の点 $(1, -1)$ における接線の方程式を求めよ。

練習問題 2

$y = x^3 - 3x^2 + 2$ において、接点の横座標が $x = 2$ であるとき、その点における接線の方程式を求めよ。

練習問題 3

$y = x^3 - 3x$ の水平な接線の方程式をすべて求めよ。

練習問題 4

$y = x^2 + 2x$ において、直線 $y = 4x + 1$ に平行な接線の方程式を求めよ。

練習問題 5

点 $P(0, -4)$ を通る $y = x^2$ の接線をすべて求めよ。

練習問題 6

$y = x^2 - 4x + 5$ の点 $(3, 2)$ における接線の方程式を求めよ。
また、接点の高さと接線の傾きを混同しやすい理由を確認するため、接点の座標と微分係数をそれぞれ示せ。

練習問題 7

$y = x^3 + x$ の点 $(0, 0)$ における接線の方程式を求めよ。

練習問題 8

$y = x^2 + 1$ の接線で、点 $P(2, 5)$ を通るものをすべて求めよ。

練習問題 1 の解答・解説

関数を $f(x) = x^3 - 2x$ とおく。

微分すると、 $f'(x) = 3x^2 - 2$ である。

接点の横座標は 1 なので、接線の傾きは $f'(1) = 1$ となる。

また、 $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 = -1$ より、接点は $(1, -1)$ である。

点傾きの式に代入すると、 $y + 1 = x - 1$ となる。

したがって、 $y = x - 2$ である。

検算すると、接点 $(1, -1)$ を通り、微分係数 $f'(1) = 1$ と同じ傾きをもつため条件を満たす。

練習問題 2 の解答・解説

接点の横座標が 2 と与えられているため、接点を直接求める。

関数を $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ とする。

微分すると、 $f'(x) = 3x^2 - 6x$ である。

したがって、 $f'(2) = 12 - 12 = 0$ となる。

また、 $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$ なので、接点は $(2, -2)$ である。

傾きが 0 であるから、 $y + 2 = 0(x - 2)$ となる。

よって、 $y = -2$ である。

検算すると、接点 $(2, -2)$ を通り、微分係数 0 と一致する水平な接線になっている。

練習問題 3 の解答・解説

水平な接線では、傾きが 0 になる。

関数を $f(x) = x^3 - 3x$ とすると、 $f'(x) = 3x^2 - 3$ である。

水平な接線の条件は、 $3x^2 - 3 = 0$ であるから、 $x^2 = 1$ となる。

よって、 $x = 1, -1$ である。

それぞれの点の高さを求める。

$f(1) = 1 - 3 = -2$ より接点は $(1, -2)$ である。

また、 $f(-1) = -1 + 3 = 2$ より接点は $(-1, 2)$ である。

傾きはいずれも 0 なので、接線は $y = -2$ 、 $y = 2$ である。

検算すると、各接点で微分係数が 0 になっているため、どちらも水平な接線である。

練習問題 4 の解答・解説

平行な直線は傾きが等しい。

与えられた直線 $y = 4x + 1$ の傾きは 4 である。

関数を $f(x) = x^2 + 2x$ とすると、 $f'(x) = 2x + 2$ である。

接線の傾きが 4 になる条件は、 $2x + 2 = 4$ である。

したがって、 $x = 1$ となる。

接点の高さは、 $f(1) = 1 + 2 = 3$ である。

接点は $(1, 3)$ 、傾きは 4 なので、 $y - 3 = 4(x - 1)$ となる。

整理すると、 $y = 4x - 1$ である。

検算すると、接点 $(1, 3)$ を通り、微分係数 $f'(1) = 4$ なので、条件を満たす。

練習問題 5 の解答・解説

接点を未知数として置く。

接点を (a, a^2) とする。

関数を $f(x) = x^2$ とする。

この関数の導関数は、 $f'(x) = 2x$ である。

接点の横座標を a とすると、その接点における微分係数は $f'(a) = 2a$ となる。

したがって、接点での傾きは $2a$ であり、この値を使って接線の方程式を作る。

接線は、 $y - a^2 = 2a(x - a)$ より、 $y = 2ax - a^2$ となる。

この接線が $P(0, -4)$ を通るので、 $-4 = 2a \cdot 0 - a^2$ より、 $a^2 = 4$ である。

したがって、 $a = 2, -2$ となる。

$a = 2$ のとき、 $y = 4x - 4$ である。

$a = -2$ のとき、 $y = -4x - 4$ である。

検算すると、接点はそれぞれ $(2, 4)$ 、 $(-2, 4)$ であり、微分係数は 4、 -4 である。また、どちらも $P(0, -4)$ を代入して成立する。

練習問題 6 の解答・解説

関数を $f(x) = x^2 - 4x + 5$ とする。

微分すると、 $f'(x) = 2x - 4$ である。

接点の横座標は 3 なので、 $f'(3) = 2$ となる。

また、 $f(3) = 9 - 12 + 5 = 2$ より、接点は $(3, 2)$ である。

接線の式は、 $y - 2 = 2(x - 3)$ となる。

整理すると、 $y = 2x - 4$ である。

ここで、接点の高さは $f(3) = 2$ 、接線の傾きは $f'(3) = 2$ である。

今回は偶然同じ値になるが、意味は異なる。

検算すると、接点 $(3, 2)$ を通り、微分係数 2 と同じ傾きになっている。

練習問題 7 の解答・解説

関数を $f(x) = x^3 + x$ とする。

微分すると、 $f'(x) = 3x^2 + 1$ である。

原点では、 $f'(0) = 1$ となる。

また、接点は $(0, 0)$ である。

したがって、 $y - 0 = 1(x - 0)$ より、 $y = x$ である。

検算すると、原点を通り、傾きは微分係数 1 と一致する。

練習問題 8 の解答・解説

接点を $(a, a^2 + 1)$ とおく。

関数を $f(x) = x^2 + 1$ とすると、 $f'(x) = 2x$ である。

接点での傾きは $2a$ なので、接線は $y - (a^2 + 1) = 2a(x - a)$ である。

整理すると、 $y = 2ax - a^2 + 1$ となる。

この接線が点 $P(2, 5)$ を通るため、 $5 = 2a \cdot 2 - a^2 + 1$ となる。

整理すると、 $a^2 - 4a + 4 = 0$ より、 $(a - 2)^2 = 0$ である。

したがって、 $a = 2$ となる。

このとき、 $y = 4x - 3$ である。

検算すると、接点は $(2, 5)$ であり、今回は通過点がそのまま接点になっている。

微分係数は $f'(2) = 4$ で、接線 $y = 4x - 3$ の傾きとも一致する。

よって、求める接線は $y = 4x - 3$ である。