第 242 講 二次曲線と直線

学習目標

- 二次曲線と直線の共通点を、連立方程式を一変数化して求められる。
- 代入後が二次方程式になる場合に、判別式から共有点の個数と接する条件を判断できる。
- 二次係数が 0 になる退化の場合を分け、解が 1 個であることだけから接線と誤判定しない。

1. 図形の共通点を方程式の共通解へ移す

交点の座標は 2 つの式を同時に満たす

二次曲線 $C : F(x, y) = 0$ と直線 $l : y = mx + n$ の共通点 (x, y) は、両方の式を同時に満たす。そこで $F(x, y) = 0$ の y を $mx + n$ に置き換えると、未知数が x だけになる。得られた方程式の各実数解 x に対して $y = mx + n$ を戻せば、共通点が得られる。
この操作が有効なのは、直線上の点が必ず $y = mx + n$ を満たすからである。代入後の実数解の個数は、表示範囲で見えた交点の個数ではなく、平面全体での共通点の個数を表す。 直線が $x = k$ のような鉛直線なら x を直接代入する。一般形 $ax + by + c = 0$ でも、一方の文字を消去できる形へ変形してから同じ考え方を用いる。

例題 1：放物線と直線の交点

放物線 $C : y^2 = 4x$ と直線 $l : y = x$ の共通点を求めよ。

例題 1 の解答・解説

$y = x$ を $y^2 = 4x$ に代入すると $x^2 = 4x$、すなわち $x(x - 4) = 0$ である。よって $x = 0, 4$ であり、$y = x$ に戻すと $y = 0, 4$ となる。したがって、共通点は $(0, 0), (4, 4)$ である。

©ミライコーチング

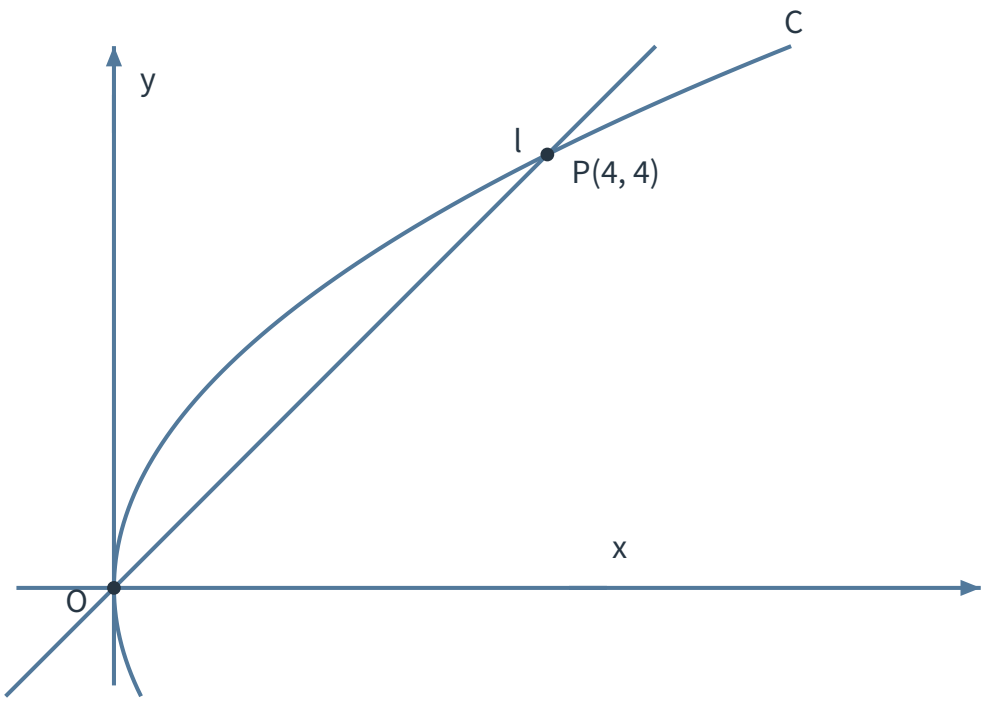

図 1　放物線 $y^2 = 4x$ と直線 $y = x$ の 2 つの交点

交点を求める基本手順

1. 直線の式を二次曲線へ代入し、一変数の方程式を作る。
2. 方程式を解いて x 座標を求める。
3. 直線の式へ戻して y 座標を求める。
4. 得られた座標を必要に応じて元の両方の式で検算する。

2. 判別式は位置関係を数える

重解が接点を表す理由

代入後の方程式が $Ax^2 + Bx + C = 0$ で、$A \neq 0$ とする。判別式を $D = B^2 - 4AC$ とおくと、$D > 0$ なら異なる 2 実数解、$D = 0$ なら 1 つの重解、$D < 0$ なら実数解なしである。
直線上では x が決まれば y も一意に決まるため、実数解の個数は共通点の個数に一致する。$D = 0$ のとき直線は二次曲線と 1 点を共有し、その点で曲線を横切らずに重なって現れるので接する。ただし、この判定は $A \neq 0$ を確認してから使う。

例題 2：放物線への接線

放物線 $C : y^2 = 4x$ と直線 $l : y = x + 1$ が接することを示し、接点を求めよ。

例題 2 の解答・解説

$y = x + 1$ を代入すると

$$(x+1)^2 = 4x$$

より $x^2 - 2x + 1 = 0$、すなわち $(x-1)^2 = 0$ である。重解 $x = 1$ に対して $y = 1 + 1 = 2$ となる。代入後は二次方程式であり、重解をもつから直線は放物線に接し、接点は $(1, 2)$ である。

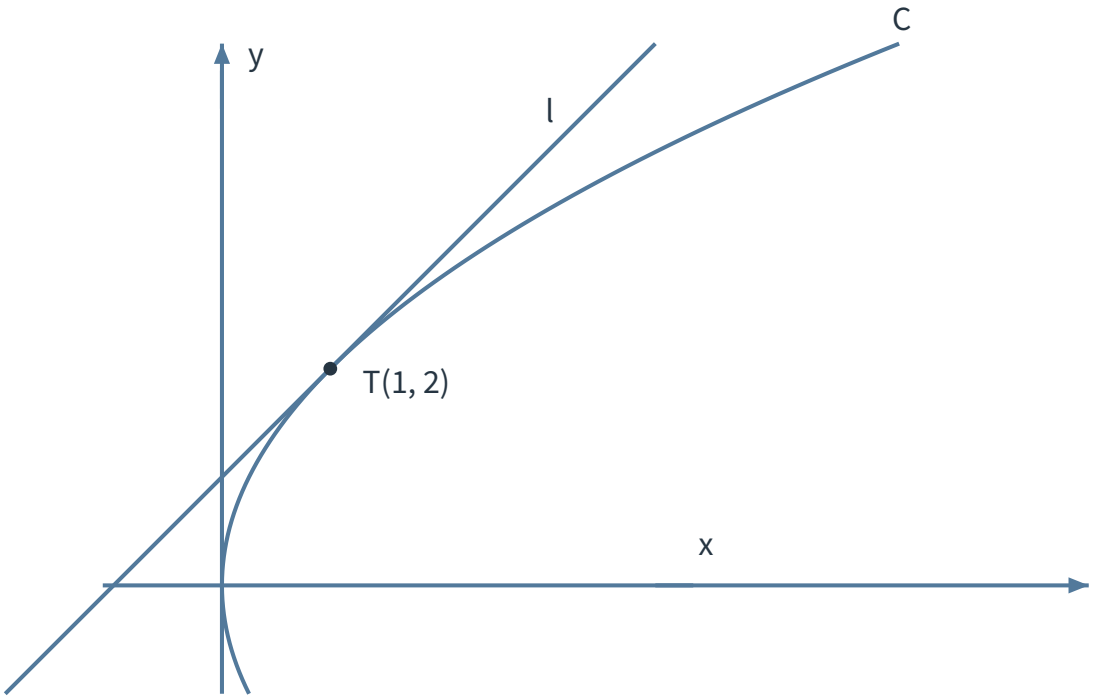

図 2　$y^2 = 4x$ に接する直線 $y = x + 1$

放物線 $y^2 = 4x$ と直線 $y = mx + n$

代入すると

$$m^2x^2 + (2mn - 4)x + n^2 = 0$$

を得る。$m \neq 0$ なら二次方程式であり、その判別式は $D = 16(1 - mn)$ である。よって $mn < 1$ なら 2 点で交わり、$mn = 1$ なら接し、$mn > 1$ なら共通点をもたない。

二次係数が消えたら判別式を使わない

$m = 0$ のとき直線は $y = n$ であり、代入後は $-4x + n^2 = 0$ という一次方程式になる。共通点は $\left(\frac{n^2}{4}, n\right)$ の 1 点であるが、この水平線は接線ではない。方程式の次数が下がって解が 1 個になった場合と、二次方程式が重解をもつ場合を区別する必要がある。 一般に $Ax^2 + Bx + C = 0$ で $A = 0$ なら、$B \neq 0$ は一次方程式、$B = 0, C \neq 0$ は解なし、$B = C = 0$ は恒等式として分けて調べる。

3. 楕円でも代入と復元を同じ順で行う

例題 3：楕円と直線の交点

楕円 $C : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ と直線 $l : y = x$ の共通点を求めよ。

例題 3 の解答・解説

$y = x$ を代入すると

$$\frac{x^2}{4} + x^2 = 1$$

である。両辺を 4 倍して $5x^2 = 4$ となるから、$x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$ である。$y = x$ より、共通点は

$$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right), \quad \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

である。

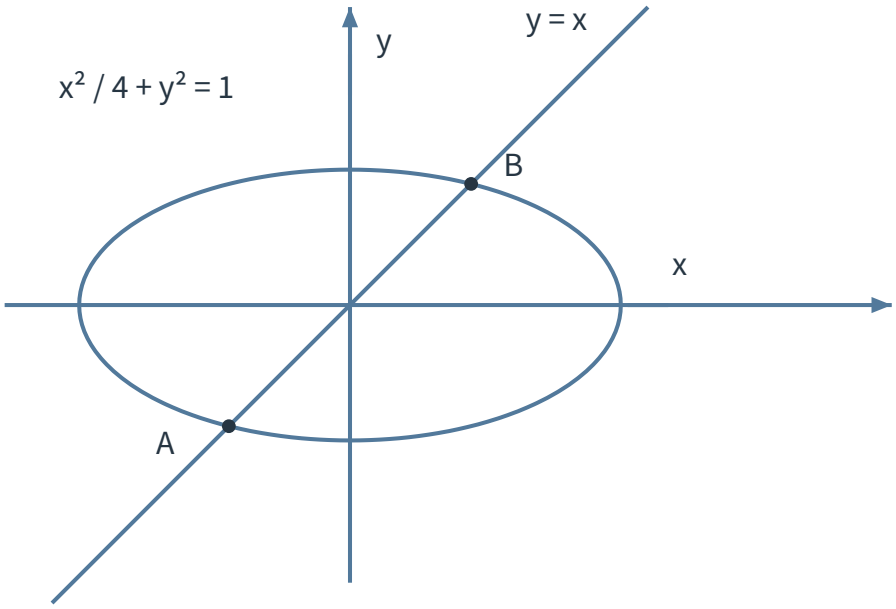

図 3　楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ と直線 $y = x$

接する条件を文字で求める

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ に直線 $y = mx + n$ を代入すると、通常は x の二次方程式になる。直線が楕円に接するための条件は、その二次方程式の判別式が 0 になることで求められる。文字を含む計算でも、二次係数が 0 でないこと、得られた条件の範囲、接点の座標まで確認する。

4. 双曲線では漸近線方向の退化に注意する

最高次の項が打ち消される場合

双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ に直線 $y = mx + n$ を代入すると

$$(1-m^2)x^2-2mnx-(n^2+1)=0$$

を得る。$m\neq\pm1$ なら二次方程式として判別式を使える。一方、$m=\pm1$ では x^2 の項が消える。これは直線が漸近線と平行な方向をもつためであり、一次方程式または矛盾した式として個別に調べる必要がある。

例題 4：双曲線と漸近線に平行な直線

双曲線 $C:x^2-y^2=1$ と、次の各直線との共通点を求め、接線かどうかも答えよ。

1. $y=x+1$
2. $y=x$

例題 4 の解答・解説

1. $y=x+1$ を代入すると $x^2-(x+1)^2=1$ より $-2x-1=1$ である。したがって $x=-1$、$y=0$ であり、共通点は $(-1,0)$ である。代入後は一次方程式であり、二次方程式の重解ではないから接線ではない。
2. $y=x$ を代入すると $x^2-x^2=1$、すなわち $0=1$ となるので共通点はない。この直線は双曲線の漸近線である。

1 個の共通点と接線は同じではない

二次方程式として重解をもつときは接する。しかし、最高次の係数が 0 になって一次方程式へ退化した結果として共通点が 1 個になる直線は、接線とは限らない。判定の順序は「二次係数を確認する」「二次なら判別式を見る」「退化したら元の方程式を直接解く」である。

5. 演習

演習 1：放物線と直線

放物線 $y^2=8x$ と直線 $y=x+2$ の共通点を求めよ。

演習 2：位置関係の分類

放物線 $y^2=4x$ と直線 $y=2x+k$ の共有点の個数を、実数 k の値によって分類せよ。

演習 3：接線と接点

楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ に直線 $y=x+k$ が接するとき、k の値と接点をすべて求めよ。

演習 4：双曲線との交点

双曲線 $x^2-y^2=1$ と直線 $y=\frac{1}{2}x$ の共通点を求めよ。

©ミライコーチング

演習 5：退化する場合

双曲線 $x^2 - y^2 = 4$ と直線 $y = x - 2$ の共通点を求め、この直線が接線でないことを説明せよ。

演習 6：文字を含む直線

放物線 $y^2 = 4x$ と直線 $y = mx + 2$ が接するとき、m の値と接点を求めよ。ただし、代入後の方程式の次数も確認せよ。

6. 演習の解答・解説

演習 1 の解答・解説

$y = x + 2$ を代入すると $(x+2)^2 = 8x$ より $x^2 - 4x + 4 = 0$、すなわち $(x-2)^2 = 0$ である。よって $x = 2$、$y = 4$ となる。共通点は $(2, 4)$ であり、二次方程式が重解をもつので直線は放物線に接する。

演習 2 の解答・解説

$y = 2x + k$ を代入すると $(2x+k)^2 = 4x$ より

$$4x^2 + (4k - 4)x + k^2 = 0$$

である。二次係数は $4 \neq 0$ であり、判別式は

$$D = (4k-4)^2 - 16k^2 = 16(1 - 2k)$$

となる。したがって、$k < \frac{1}{2}$ のとき 2 個、$k = \frac{1}{2}$ のとき 1 個、$k > \frac{1}{2}$ のとき 0 個である。

演習 3 の解答・解説

$y = x + k$ を代入し、両辺を 4 倍すると

$$5x^2 + 8kx + 4k^2 - 4 = 0$$

である。判別式が 0 だから

$$(8k)^2 - 20(4k^2 - 4) = 0$$

より $80 - 16k^2 = 0$、したがって $k = \pm\sqrt{5}$ である。重解は $x = -\frac{8k}{10} = -\frac{4k}{5}$、また $y = x + k = \frac{k}{5}$ である。よって接点は、$k = \sqrt{5}$ のとき $\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$、$k = -\sqrt{5}$ のとき $\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ である。

演習 4 の解答・解説

$y = \frac{1}{2}x$ を代入すると $x^2 - \frac{1}{4}x^2 = 1$ より $\frac{3}{4}x^2 = 1$ である。したがって $x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ であり、$y = \frac{1}{2}x$ より $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ となる。共通点は

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

である。

演習 5 の解答・解説

$y = x - 2$ を代入すると $x^2 - (x-2)^2 = 4$ より $4x - 4 = 4$ となる。よって $x = 2$、$y = 0$ であり、共通点は $(2, 0)$ である。代入後は二次方程式ではなく一次方程式である。この 1 解は重解ではなく、直線の傾き 1 が漸近線 $y = x$ の傾きと一致するために最高次項が消えた結果である。したがって、この直線は接線ではない。

演習 6 の解答・解説

$y = mx + 2$ を代入すると

$$m^2x^2 + (4m - 4)x + 4 = 0$$

である。$m = 0$ なら $-4x + 4 = 0$ となり共通点は $(1, 2)$ だが、一次方程式へ退化しているので接線ではない。$m \neq 0$ のとき、接するための条件は

$$D = (4m - 4)^2 - 16m^2 = 16(1 - 2m) = 0$$

である。よって $m = \frac{1}{2}$ である。このとき代入後は $\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 = 0$、すなわち $(x - 4)^2 = 0$ だから $x = 4$、$y = 4$ となる。したがって、求める値は $m = \frac{1}{2}$、接点は $(4, 4)$ である。