第 036 講 二次元の運動量保存

この講でできるようになること

- 二次元の衝突について、系・座標軸・外力の力積を確認し、運動量が保存される成分を判断できる。
- 衝突前後の運動量をx成分とy成分に分け、符号と質量を正しく扱って未知の速度を求められる。
- 運動量のベクトル図から、各物体の運動量と系全体の運動量の関係を説明できる。
- 運動量保存と運動エネルギー保存を区別し、与えられた条件だけで答えが決まるか判断できる。

基礎：運動量保存を二つの方向から考える

1. 衝突後に進む方向が分かれたら

滑らかな水平面上を東向きに進む物体 A が、静止している物体 B に衝突する場面を考える。衝突後、A は北東へ、B は南東へ進んだとする。

このとき、衝突前には北向きにも南向きにも運動していなかったのに、衝突後には両方の向きの運動が現れている。しかし、これだけで運動量保存に反したとはいえない。

A が北向きの運動量を得た分、B が南向きの運動量を得て、両者が打ち消し合うことがあるからである。

一次元では一つの軸上で運動量を足し合わせた。二次元でも考え方は同じであり、**運動量を互いに直交する二つの成分に分けて足し合わせる**。

本講では、水平面内の方向を次のように固定する。

- 東向き：$+x$方向
- 西向き：$-x$方向
- 北向き：$+y$方向
- 南向き：$-y$方向

図では右が$+x$、上が$+y$に対応する。ここでのy軸は水平面内の南北方向であり、鉛直方向ではない。

2. 何を一つの系として扱うか

第 033 講で扱ったように、運動量が保存されるかどうかは、選んだ系に働く外力の力積によって決まる。

本講の基本モデルでは、次の条件を用いる。

- 滑らかな水平面上で、一定質量の物体 A と B が一度だけ衝突する。
- 系は衝突前後を通じて同じ物体 A と B からなる。
- 床に対して静止した慣性座標系で、衝突直前と直後を比較する。
- 重力と床からの垂直抗力は水平面に垂直な方向でつり合っている。
- 特に指定がなければ、衝突を考える短い時間に系 A+B が受ける水平面内の外力の力積は無視できる。

衝突の際、A が B を押す力と B が A を押す力は、系 A+B の内部で働く作用・反作用の力である。

この二つは大きさが等しく向きが反対であり、同じ時間に及ぼす力積も打ち消し合う。そのため、A と B の運動量はそれぞれ変わっても、系全体の運動量は保存され得る。

©ミライコーチング

保存されるのは系全体の運動量

衝突によって各物体の運動量が変化しても、系 A+B に働く外力の力積が0なら、系全体の運動量は保存される。

保存則を立てる前に、必ず「どの物体を系に含めるか」と「どの時間の前後を比較するか」を決める。

3. 二次元の運動量を成分で表す

物体の質量をm、速度のx成分をv_x、y成分をv_yとする。

物体の運動量は、質量と速度の積である。

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

その成分は次のようになる。

$$p_x = mv_x, \qquad p_y = mv_y$$

運動量の単位は$\mathrm{kg\,m/s}$である。

例えば、質量$2\,\mathrm{kg}$の物体が東向きに$3\,\mathrm{m/s}$、北向きに$1\,\mathrm{m/s}$の速度成分を持つ場合、運動量は

$$\begin{aligned} p_x &= (2\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s}) \\ &= 6\,\mathrm{kg\,m/s}, \\ p_y &= (2\,\mathrm{kg})(1\,\mathrm{m/s}) \\ &= 2\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

一方、北ではなく南へ$1\,\mathrm{m/s}$で進む場合、y成分は負になる。

$$p_y = (2\,\mathrm{kg})(-1\,\mathrm{m/s}) = -2\,\mathrm{kg\,m/s}$$

負号は運動量の大きさが負という意味ではなく、向きを表している。

4. x方向とy方向に分けて保存する

物体 A、B の質量をm_A, m_Bとする。衝突直前の速度をそれぞれ$\vec{u}_A, \vec{u}_B$、衝突直後の速度を$\vec{v}_A, \vec{v}_B$とする。

また、添字iは衝突直前、fは衝突直後を意味する。

系全体の運動量の各成分は、二つの物体の運動量成分の和である。

$$P_{x,\mathrm{i}} = m_A u_{Ax} + m_B u_{Bx},$$
$$P_{y,\mathrm{i}} = m_A u_{Ay} + m_B u_{By},$$
$$P_{x,\mathrm{f}} = m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx},$$
$$P_{y,\mathrm{f}} = m_A v_{Ay} + m_B v_{By}$$

衝突中に系 A+B が受ける外力の力積を$\vec{J}_{\mathrm{ext}}$とすると、運動量と力積の関係は

$$P_{x,\mathrm{f}} - P_{x,\mathrm{i}} = J_{\mathrm{ext},x},$$
$$P_{y,\mathrm{f}} - P_{y,\mathrm{i}} = J_{\mathrm{ext},y}$$

である。

系 A+B に働く水平面内の外力の力積を無視できる場合、本講の近似モデルではその両成分を0として扱う。外力の力積が厳密に0なら以下の保存式は厳密に成立し、無視する近似が成り立つ場合にはその精度で成立する。したがって、

$$m_A u_{Ax} + m_B u_{Bx} = m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx},$$
$$m_A u_{Ay} + m_B u_{By} = m_A v_{Ay} + m_B v_{By}$$

が成立する。

二次元の運動量保存則

同じ慣性座標系で衝突直前と直後を比較するとき、選んだ系に働く外力の力積が水平面内で0なら、全運動量のx成分とy成分はそれぞれ保存される。

$$P_{x,\mathrm{i}} = P_{x,\mathrm{f}}, \qquad P_{y,\mathrm{i}} = P_{y,\mathrm{f}}$$

これは互いに独立な二つの成分方程式である。

例えば、衝突前の全運動量が東向きだけだった場合、衝突前のy成分は0である。

衝突後に A が北向きの運動量を持ったなら、B はその分を打ち消す南向きの運動量を持たなければならない。

それぞれのy成分が0である必要はなく、二つを足した結果が0になればよいのである。

例題 1

滑らかな水平面上で、質量がともに1 kgの物体 A と B が衝突する。A は衝突直前、東向きに6 m/sで進み、B は静止していた。

衝突直後の A の速度成分は、東向きに3 m/s、北向きに3 m/sであった。

系 A+B に働く水平面内の外力の力積は無視できる。

(1) 衝突直後の B の速度のx成分とy成分を求めよ。

(2) 衝突直後の A と B について、速度の大きさと進行方向を求めよ。角度は東向きの$+x$軸を基準とする。

(3) 衝突直前と直後の系全体の運動エネルギーを比較せよ。

解答・解説

(1) B の速度成分

まず系 A+B の衝突直前の全運動量を求める。

$$\begin{aligned} P_{x,\mathrm{i}} &= (1\,\mathrm{kg})(6\,\mathrm{m/s}) + (1\,\mathrm{kg})(0\,\mathrm{m/s}) \\ &= 6\,\mathrm{kg\,m/s}, \\ P_{y,\mathrm{i}} &= 0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

外力の力積を無視できるため、両成分が保存される。

x方向について、

$$\begin{aligned} 6\,\mathrm{kg\,m/s} &= (1\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s}) + (1\,\mathrm{kg})v_{Bx}, \\ v_{Bx} &= 3\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

y方向について、

$$\begin{aligned} 0\,\mathrm{kg\,m/s} &= (1\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s}) + (1\,\mathrm{kg})v_{By}, \\ v_{By} &= -3\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

よって B は、東向きに3 m/s、南向きに3 m/sの速度成分を持つ。

(2) 速度の大きさと進行方向

速度の大きさは、互いに直交する二成分から求められる。

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

A について、

$$\begin{aligned} v_A &= \sqrt{(3\,\mathrm{m/s})^2 + (3\,\mathrm{m/s})^2} \\ &= 3\sqrt{2}\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

A は東向きと北向きの成分が等しいため、進行方向は$+x$軸から反時計回りに45°である。

B についても、

$$\begin{aligned} v_B &= \sqrt{(3\,\mathrm{m/s})^2 + (-3\,\mathrm{m/s})^2} \\ &= 3\sqrt{2}\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

である。

B の進行方向は、$+x$軸から時計回りに45°である。反時計回りを正とする角度では-45°となる。

(3) 運動エネルギーの比較

質量mの物体の運動エネルギーは、速度の大きさvを用いて

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

と表す。

衝突前に動いていたのは A だけなので、

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{i}} &= \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(6\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 18\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

衝突後は A と B の両方が動いているため、

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{f}} &= \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})\left(3\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})\left(3\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}\right)^2 \\ &= 9\,\mathrm{J} + 9\,\mathrm{J} \\ &= 18\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

よって、この衝突では全運動量だけでなく、全運動エネルギーも保存されている。

ただし、**運動量が保存されたから運動エネルギーも保存されたのではない**。ここでは両者を別々に計算して確認したのである。

5. 運動量を矢印で足し合わせる

例題 1 の衝突直後について、A と B の運動量をベクトルとして表す。

両物体の質量は1 kgなので、運動量の成分は

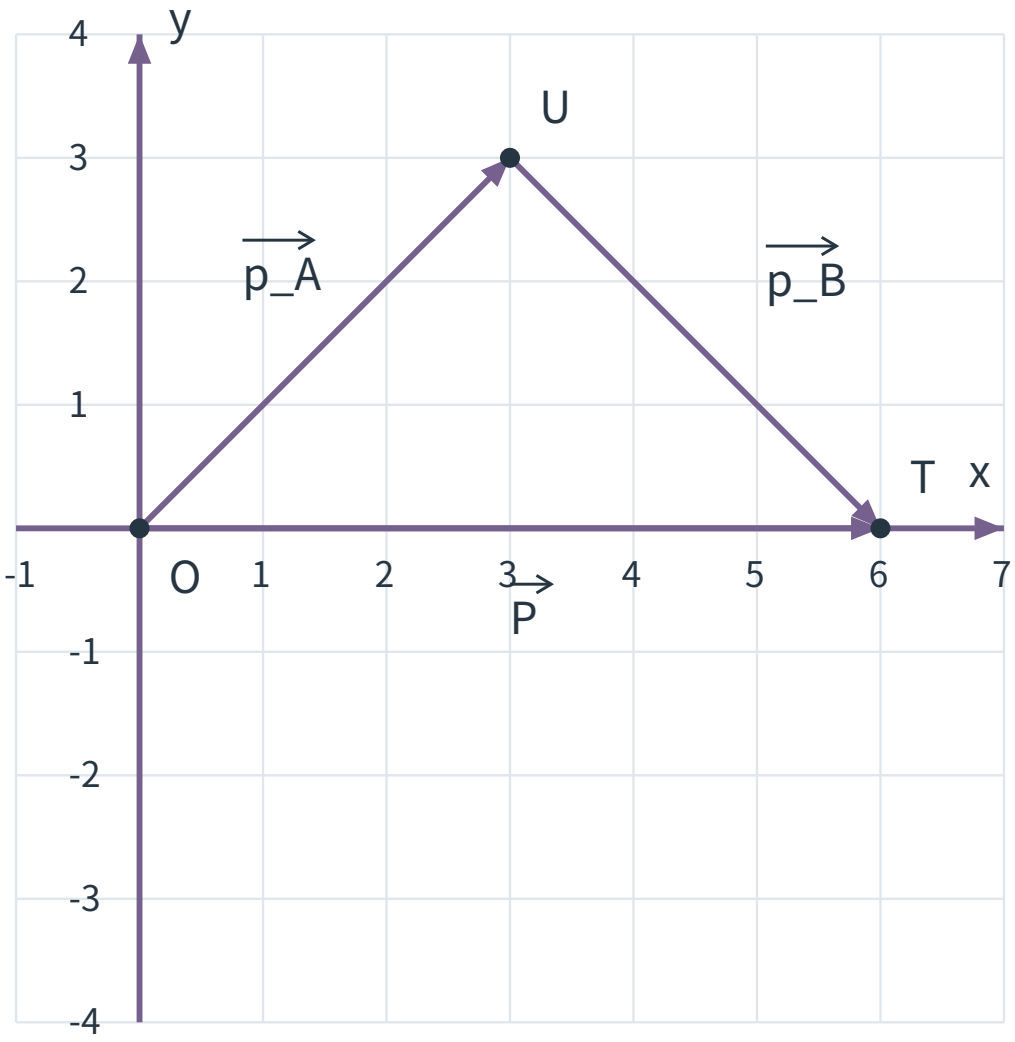
$$\left(p_{Ax}, p_{Ay}\right) = (3, 3)\,\mathrm{kg\,m/s},$$

$$\left(p_{Bx}, p_{By}\right) = (3, -3)\,\mathrm{kg\,m/s}$$

である。

次の図は、これらを足し合わせた**運動量空間のベクトル図**である。

横軸は運動量の東西成分、縦軸は南北成分を表し、両軸とも1目盛は1 kg m/sである。右が東向き、上が北向きに対応する。



この図では、O は運動量空間の原点、U は A の運動量ベクトルの終点、T は全運動量ベクトルの終点である。

O から U への矢印が$\vec{p}_A$、U から T への矢印が$\vec{p}_B$、O から T への矢印が系全体の$\vec{P}$を表す。

$\vec{p}_B$は、ベクトルの和を表すために始点をUへ平行移動して描いたものである。UやTは物体の位置や衝突地点ではない。また、この図の折れた矢印は物体の移動経路でもない。

矢印のx成分を足すと、

$$P_x = (3+3)\,\mathrm{kg\,m/s} = 6\,\mathrm{kg\,m/s}$$

となる。

一方、y成分を足すと、

$$P_y = (3-3)\,\mathrm{kg\,m/s} = 0\,\mathrm{kg\,m/s}$$

となる。

したがって、衝突後の全運動量は衝突前と同じ東向きの6 kg m/sである。

二つの斜め向きの運動量を合成しても、合計は東向きだけになる。

ベクトルの和と大きさの和は異なる

全運動量の大きさは、各物体の運動量の大きさを単純に足したものではない。

全運動量の成分を先に足してから、

$$|\,\vec{P}\,| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

によって大きさを求める。

また、例題1では衝突後のAとBの進行方向が直交しているが、それはこの数値条件で成り立った結果であり、二次元衝突に共通する決まりではない。

6. 質量が違うときも運動量で考える

例題 2

滑らかな水平面上で、質量2 kgのAが東向きに3 m/sで進み、静止している質量1 kgのBに衝突した。

衝突直後のAの速度成分は、東向きに2 m/s、北向きに1 m/sであった。

衝突中の系A+Bに働く水平面内の外力の力積は無視できる。

(1) 衝突直後のAの運動量成分を求めよ。

(2) 衝突直後のBの速度成分を求めよ。

(3) 衝突前後の全運動エネルギーを比較せよ。

解答・解説

(1) A の運動量成分

運動量は質量と速度の積である。

$$\begin{aligned} p_{Ax} &= (2\,\mathrm{kg})(2\,\mathrm{m/s}) \\ &= 4\,\mathrm{kg\,m/s}, \\ p_{Ay} &= (2\,\mathrm{kg})(1\,\mathrm{m/s}) \\ &= 2\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

したがって、A の運動量成分は$(4, 2)\,\mathrm{kg\,m/s}$である。

(2) B の速度成分

衝突前の全運動量は

$$\begin{aligned} P_{x,\mathrm{i}} &= (2\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s}) \\ &= 6\,\mathrm{kg\,m/s}, \\ P_{y,\mathrm{i}} &= 0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。

衝突後のx成分について、

$$\begin{aligned} 6\,\mathrm{kg\,m/s} &= 4\,\mathrm{kg\,m/s} + (1\,\mathrm{kg})v_{Bx}, \\ v_{Bx} &= 2\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

y成分について、

$$\begin{aligned} 0\,\mathrm{kg\,m/s} &= 2\,\mathrm{kg\,m/s} + (1\,\mathrm{kg})v_{By}, \\ v_{By} &= -2\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

よって、B は東向きに$2\,\mathrm{m/s}$、南向きに$2\,\mathrm{m/s}$の速度成分を持つ。

(3) 運動エネルギーの比較

衝突前の全運動エネルギーは、

$$K_{\mathrm{i}} = \frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s})^2 = 9\,\mathrm{J}$$

である。

衝突後の A について、

$$K_{A,\mathrm{f}} = \frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})\{(2\,\mathrm{m/s})^2 + (1\,\mathrm{m/s})^2\} = 5\,\mathrm{J}$$

となる。

B については、

$$K_{B,\mathrm{f}} = \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})\{(2\,\mathrm{m/s})^2 + (-2\,\mathrm{m/s})^2\} = 4\,\mathrm{J}$$

となる。

したがって、

$$K_{\mathrm{f}} = 5\,\mathrm{J} + 4\,\mathrm{J} = 9\,\mathrm{J}$$

であり、全運動エネルギーも保存される。

この問題では A と B の質量が異なる。速度成分をそのまま足すのではなく、それぞれに質量を掛けた**運動量成分の和**を保存する点が重要である。

7. 衝突後に合体する場合

衝突後、二つの物体がくっついて一緒に動くこともある。

この場合、衝突後の A と B は同じ速度ベクトル$\vec{V}$を持つ。したがって、衝突後の全運動量は、合計質量$m_A + m_B$と共通速度の積で表せる。

水平面内の外力の力積が0なら、

$$m_A u_{Ax} + m_B u_{Bx} = (m_A + m_B)V_x,$$
$$m_A u_{Ay} + m_B u_{By} = (m_A + m_B)V_y$$

となる。

運動量保存によって求まるのは、共通速度の二つの成分である。速さが必要なら、最後に二成分から大きさを求める。

例題 3

滑らかな水平面上で、質量2 kgの A が東向きに3 m/s、質量1 kgの B が北向きに3 m/sで進んでいる。

二つは衝突後に合体し、一緒に動き始めた。

衝突中、系 A+B に働く水平面内の外力の力積は無視できる。

(1) 衝突直前の全運動量のx成分とy成分を求めよ。

(2) 合体後の共通速度の成分と速さを求めよ。

(3) 合体によって全運動エネルギーがどれだけ変化したか求めよ。

解答・解説

(1) 衝突直前の全運動量

x方向には A だけが運動しているため、

$$\begin{aligned} P_{x,\mathrm{i}} &= (2\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s}) \\ &= 6\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

y方向には B だけが運動しているため、

$$\begin{aligned} P_{y,\mathrm{i}} &= (1\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s}) \\ &= 3\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

よって、衝突直前の全運動量成分は$(6, 3)\,\mathrm{kg\,m/s}$である。

(2) 合体後の共通速度

合体後の質量は

$$2\,\mathrm{kg} + 1\,\mathrm{kg} = 3\,\mathrm{kg}$$

である。

x方向の運動量保存より、

$$6\,\mathrm{kg\,m/s} = (3\,\mathrm{kg})V_x,$$

$$V_x = 2\,\mathrm{m/s}$$

となる。

y方向についても、

$$3\,\mathrm{kg\,m/s} = (3\,\mathrm{kg})V_y,$$

$$V_y = 1\,\mathrm{m/s}$$

となる。

したがって、合体後の速度成分は東向きに$2\,\mathrm{m/s}$、北向きに$1\,\mathrm{m/s}$である。

その速さは、

$$V = \sqrt{(2\,\mathrm{m/s})^2 + (1\,\mathrm{m/s})^2}$$

$$= \sqrt{5}\,\mathrm{m/s}$$

となる。

(3) 運動エネルギーの変化

衝突前は二つの物体が別々に動いているため、

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{i}} &= \frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 9\,\mathrm{J} + 4.5\,\mathrm{J} \\ &= 13.5\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

衝突後は合計質量3 kgの物体が共通速度で動くため、

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{f}} &= \frac{1}{2}(3\,\mathrm{kg})\{(2\,\mathrm{m/s})^2 + (1\,\mathrm{m/s})^2\} \\ &= 7.5\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

よって、

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{i}} - K_{\mathrm{f}} &= 13.5\,\mathrm{J} - 7.5\,\mathrm{J} \\ &= 6\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

全運動エネルギーは6 J減少した。

合体する際には物体の変形や内部エネルギーの増加などが起こり得る。全運動エネルギーが減少しても、外力の力積が0であれば、系 A+B の全運動量は保存される。

8. 運動量保存と運動エネルギー保存は別の条件

二次元の衝突では、運動量の保存と運動エネルギーの保存を区別する必要がある。

速度成分v_x, v_yを用いると、質量mの物体の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right)$$

となる。

ここで、$v_x^2 + v_y^2$は速度の大きさの二乗である。運動エネルギーは向きを持たないスカラー量なので、運動量のようにx方向とy方向の保存則を別々に立てるものではない。

衝突中の水平面内外力の力積を無視できる場合、全運動量は保存される。ただし、衝突時の変形や熱などへのエネルギーの変化によって、全運動エネルギーが減少することもある。

反対に、弾性衝突であるという条件が与えられていれば、その衝突では全運動エネルギーも保存される。

調べる量	保存される条件と扱い
全運動量のx成分	系に働く外力のx方向の力積が0なら保存
全運動量のy成分	系に働く外力のy方向の力積が0なら保存
全運動エネルギー	弾性衝突なら保存。運動量保存だけでは判断できない

また、運動量保存は衝突後の速度を必ず一意に決める法則ではない。

A と B が衝突した後の速度には、

$$v_{Ax},\quad v_{Ay},\quad v_{Bx},\quad v_{By}$$

という四つの成分がある。

これらがすべて未知の場合、運動量保存から得られるのはx方向とy方向の二つの式だけである。

したがって、衝突後の全速度を決めるには、一方の物体の速度、合体するという条件、弾性という条件など、問題ごとに追加の情報が必要になる。

ただし、弾性という条件を一つ加えただけでも、一般には四つの未知速度成分が一意に決まるとは限らない。

一次元の反発係数をそのまま二方向へ使わない

第 035 講では、一直線上の衝突について反発係数を扱った。

二次元の衝突では、速度をx成分とy成分に分けられるからといって、一次元の反発係数の式をそれぞれの軸に機械的に適用してよいわけではない。

本講では、運動量の成分保存と、問題文で明示された追加条件だけを使用する。

演習問題

基礎：系・方向・成分から考える

演習 1

次の問題は、例題 1 で扱った衝突後の運動量ベクトル図を使って考えるものである。

質量がともに1 kgの物体 A と B が滑らかな水平面上で衝突した。衝突直前、A は東向きに6 m/s で進み、B は静止していた。衝突直後、A の速度成分は東向きに3 m/s、北向きに3 m/sである。

系 A+B に働く水平面内の外力の力積は無視できる。東を$+x$、北を$+y$とし、両物体の質量は衝突前後で変わらない。

演習 1(1) 本文の運動量ベクトル図について、O、U、T が物体の実際の位置を示しているか答えよ。また、各矢印が何を表すか説明せよ。

演習 1(2) 運動量保存を考える系と、比較する二つの状態を答えよ。

演習 1(3) 系全体の運動量について、x成分とy成分がそれぞれ保存されるか判断し、その理由を説明せよ。

演習 1(4) 衝突直後、B の運動量のy成分が$-3\,\mathrm{kg\,m/s}$となる理由を説明せよ。また、B の運動量のx成分を求めよ。

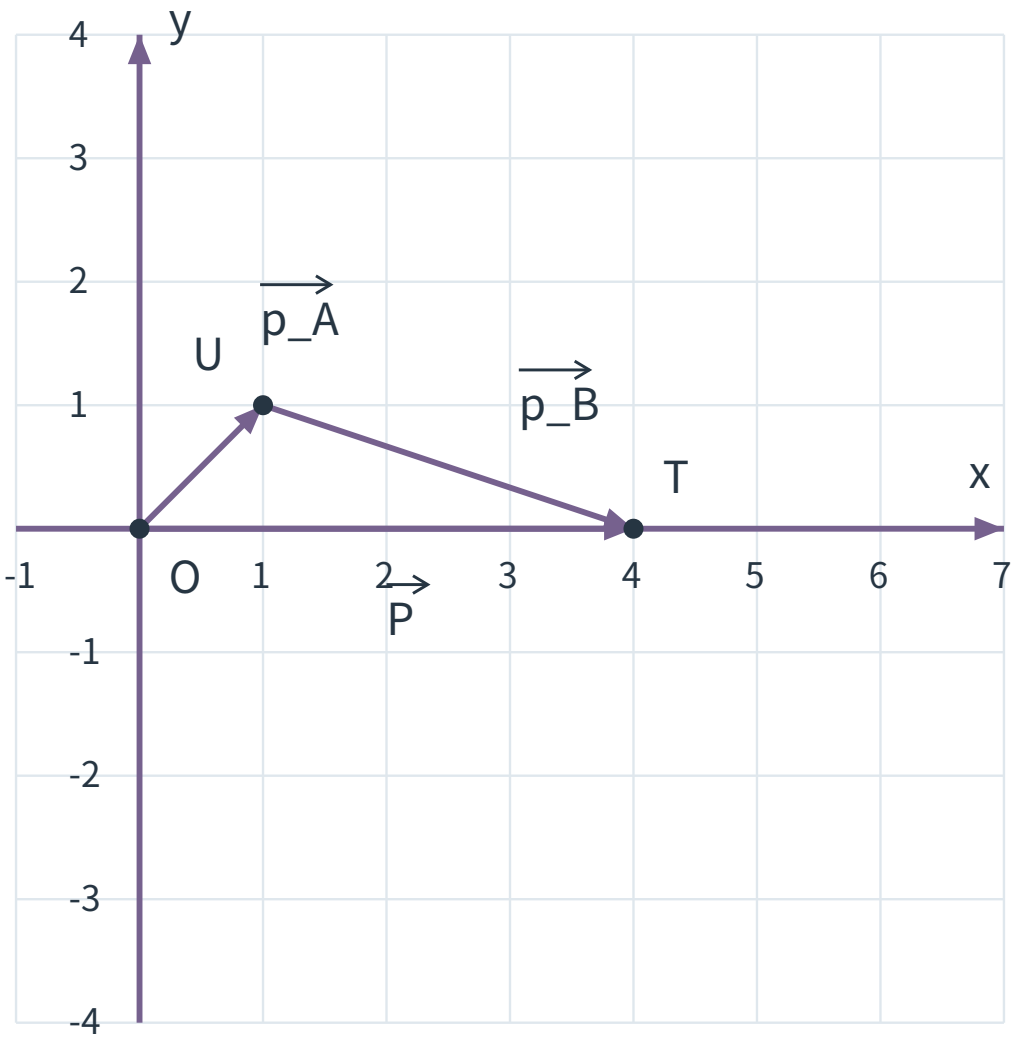
演習 1(5) 運動量保存だけで全運動エネルギーの保存を結論できるか答えよ。そのうえで、この衝突について衝突前後の全運動エネルギーを計算し、保存されるか判断せよ。

対応解説：巻末の「演習 1 の解答・解説」

運動量の向きとエネルギーの変化

次の図は、滑らかな水平面上で衝突した質量がともに1 kgの物体 A と B について、衝突直後の運動量を表したものである。

横軸は東西、縦軸は南北の運動量成分であり、右が$+x$、上が$+y$である。両軸とも1目盛は1 kg m/s で、図は運動量空間を表し、物体の位置や移動経路を示すものではない。



O は運動量空間の原点、U は A の運動量ベクトルの終点、T は全運動量ベクトルの終点である。O から U が A の運動量、U から T が平行移動して描いた B の運動量、O から T が系全体の運動量を表す。

ここでも、U を物体 A の実際の位置と読み替えず、矢印の始点と終点の成分差から運動量を読み取る。

演習 2

上の運動量ベクトル図に対応する衝突を考える。

衝突直前、質量1 kgの A は東向きに4 m/sで進み、質量1 kgの B は静止していた。

衝突直後の A の速度成分は、東向きに1 m/s、北向きに1 m/sである。

系 A+B に働く水平面内の外力の力積は無視できる。東を$+x$、北を$+y$とし、質量は変わらない。

演習 2(1) 衝突直後の B の速度成分を、運動量保存則から求めよ。

演習 2(2) 衝突直前と直後の系全体の運動量成分を求め、図の矢印の和と一致することを確かめよ。

演習 2(3) 衝突前後の全運動エネルギーを求め、変化量を求めよ。また、その変化が運動量保存と矛盾しない理由を説明せよ。

対応解説：巻末の「演習 2 の解答・解説」

演習 3

滑らかな水平面上で、質量1 kgの A が東向きに4 m/s、質量1 kgの B が北向きに3 m/sで進んでいる。

二つの物体は衝突後に合体する。衝突中、系 A+B に働く水平面内の外力の力積は無視できる。東を$+x$、北を$+y$とする。

演習 3(1) 衝突直前の全運動量のx成分、y成分を求めよ。

演習 3(2) 衝突直前の全運動量の大きさを求めよ。

演習 3(3) 合体後の共通速度のx成分、y成分および速さを求めよ。

演習 3(4) 衝突前後の全運動エネルギーを比較し、減少した量を求めよ。

対応解説：巻末の「演習 3 の解答・解説」

発展：条件が足りるか・保存量が足りるか

ここからは、運動量保存の式を立てるだけでなく、**その式を使ってよい条件と、求める量を決定するのに必要な情報**を判断する。

前提となるのは、第 004 講のベクトル成分、第 033 講の外力の力積と運動量保存、第 035 講の衝突とエネルギー条件の区別である。

©ミライコーチング

演習 4

水平面内で運動する物体 A と B を合わせた系について、ある時間区間の始めの全運動量が

$$\left(P_{x,\mathrm{i}}, P_{y,\mathrm{i}}\right) = (6, 4)\,\mathrm{kg\,m/s}$$

であった。

この区間に系 A+B が受けた水平面内の外力の力積は、

$$\left(J_{\mathrm{ext},x}, J_{\mathrm{ext},y}\right) = (0, -2)\,\mathrm{N\,s}$$

である。

東を$+x$、北を$+y$とする。負のy方向の力積は、水平面内で南向きに働いた外力によるものであり、重力ではない。

演習 4(1) 時間区間の終わりの全運動量のx成分とy成分を求めよ。

演習 4(2) x成分とy成分のそれぞれについて、運動量が保存されたか判断し、その理由を説明せよ。

演習 4(3) この情報だけで、時間区間の終わりにおける A と B それぞれの速度を求められるか答えよ。

対応解説：巻末の「演習 4 の解答・解説」

演習 5

滑らかな水平面上で、質量がともに1 kgの物体 A と B が衝突する。

衝突直前、A は東向きに4 m/sで進み、B は静止していた。東を$+x$、北を$+y$とし、衝突中の系 A+B に働く水平面内の外力の力積は無視できる。

衝突直後の速度について、次の候補が示された。

- A の速度成分：$(2, 3)\,\mathrm{m/s}$
- B の速度成分：$(2, -3)\,\mathrm{m/s}$

ただし、この衝突では系 A+B に外部からエネルギーが供給されず、系の内部エネルギーが運動エネルギーへ放出されることもないものとする。衝突前後で質量は変わらない。

演習 5(1) この候補がx方向とy方向の運動量保存則を満たすか調べよ。

演習 5(2) 衝突前後の全運動エネルギーを計算せよ。

演習 5(3) 与えられた衝突条件の下で、この候補を衝突直後の速度として採用できるか判断し、その理由を説明せよ。

対応解説：巻末の「演習 5 の解答・解説」

演習 6

滑らかな水平面上で、質量がともに1 kgの物体 A と B が一度だけ衝突する。

衝突直前、A は東向きに4 m/sで進み、B は静止していた。系 A+B に働く水平面内の外力の力積は無視できる。東を$+x$、北を$+y$とする。

衝突後の A と B の速度成分はいずれも不明であり、合体するか、弾性衝突か、一方の衝突後速度などの追加条件は与えられていない。

演習 6(1) 衝突直後の四つの速度成分$v_{Ax}, v_{Ay}, v_{Bx}, v_{By}$について、運動量保存から得られる二つの方程式を書け。

演習 6(2) v_{Ax}, v_{Ay}を使って、v_{Bx}, v_{By}を表せ。

演習 6(3) 運動量保存だけで四つの速度成分を一意に決められるか答えよ。また、条件が不足する理由と、追加情報の例を説明せよ。

対応解説：巻末の「演習 6 の解答・解説」

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

演習 1(1) 図の意味

図は、衝突後の運動量を足し合わせるためのベクトル図である。O、U、T は運動量空間の点であり、物体 A や B の実際の位置ではない。

- O から U への矢印は A の運動量$\vec{p}_A$を表す。
- U から T への矢印は B の運動量$\vec{p}_B$を表す。
- O から T への矢印は系全体の運動量$\vec{P}$を表す。

B の運動量ベクトルは、A の運動量ベクトルの終点から描くために平行移動している。

したがって、図の折れた矢印を物体の移動経路と解釈してはいけない。

演習 1(2) 系と比較する状態

系は**物体 A と B を合わせた系**である。

比較する状態は、A と B が衝突する直前と、衝突した直後である。

同じ二つの物体を、同じ慣性座標系・同じ座標軸で比較する。

演習 1(3) 成分保存の判断

水平面内の外力の力積は無視できるため、

$$J_{\mathrm{ext},x} = 0, \qquad J_{\mathrm{ext},y} = 0$$

である。

したがって、系全体の運動量のx成分とy成分は、どちらも保存される。

$$P_{x,\mathrm{i}} = P_{x,\mathrm{f}}, \qquad P_{y,\mathrm{i}} = P_{y,\mathrm{f}}$$

保存されるのは A と B を足し合わせた全運動量であり、個々の物体の運動量ではない。

演習 1(4) B の運動量成分

衝突直前、A は東向きに進み、B は静止している。そのため、系全体のy成分は$0\,\mathrm{kg\,m/s}$である。

衝突後の A のy方向の運動量は、

$$\begin{aligned} p_{Ay} &= (1\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s}) \\ &= 3\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。

系全体のy成分は保存されるので、

$$\begin{aligned} 0\,\mathrm{kg\,m/s} &= 3\,\mathrm{kg\,m/s} + p_{By}, \\ p_{By} &= -3\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

つまり、A が得た北向きの運動量と、B の南向きの運動量が打ち消し合う。

x方向では、衝突直前の全運動量が$6\,\mathrm{kg\,m/s}$、衝突直後の A の運動量が$3\,\mathrm{kg\,m/s}$であるため、

$$\begin{aligned} 6\,\mathrm{kg\,m/s} &= 3\,\mathrm{kg\,m/s} + p_{Bx}, \\ p_{Bx} &= 3\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

したがって、B の運動量成分は$(3, -3)\,\mathrm{kg\,m/s}$である。

演習 1(5) エネルギー保存の判断

運動量保存だけから、運動エネルギーも保存されるとは結論できない。

衝突直前の全運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{i}} &= \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(6\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 18\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

衝突直後の A と B は、どちらも速度の大きさが$3\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}$となる。

したがって、

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{f}} &= \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})\left(3\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})\left(3\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}\right)^2 \\ &= 18\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

この衝突では$K_{\mathrm{i}} = K_{\mathrm{f}}$であるため、全運動エネルギーも保存される。

ただし、これは実際の計算によって確認した結果であり、運動量保存則だけから導いたものではない。

演習 2 の解答・解説

演習 2(1) B の速度成分

衝突直前の全運動量は、

$$\begin{aligned} P_{x,\mathrm{i}} &= (1\,\mathrm{kg})(4\,\mathrm{m/s}) \\ &= 4\,\mathrm{kg\,m/s}, \\ P_{y,\mathrm{i}} &= 0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。

衝突直後の A の運動量成分は、

$$\begin{aligned} p_{Ax} &= (1\,\mathrm{kg})(1\,\mathrm{m/s}) \\ &= 1\,\mathrm{kg\,m/s}, \\ p_{Ay} &= (1\,\mathrm{kg})(1\,\mathrm{m/s}) \\ &= 1\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。

外力の力積を無視できるため、x方向について、

$$\begin{aligned} 4\,\mathrm{kg\,m/s} &= 1\,\mathrm{kg\,m/s} + (1\,\mathrm{kg})v_{Bx}, \\ v_{Bx} &= 3\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

y方向では、

$$\begin{aligned} 0\,\mathrm{kg\,m/s} &= 1\,\mathrm{kg\,m/s} + (1\,\mathrm{kg})v_{By}, \\ v_{By} &= -1\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

したがって、B の速度成分は$(3, -1)\,\mathrm{m/s}$である。

B は東向きに$3\,\mathrm{m/s}$、南向きに$1\,\mathrm{m/s}$の成分を持つ。

演習 2(2) 全運動量と図の一致

衝突直前の全運動量成分は、

$$\left(P_{x,\mathrm{i}}, P_{y,\mathrm{i}}\right) = (4, 0)\,\mathrm{kg\,m/s}$$

である。

衝突直後について、A と B の運動量成分を足すと、

$$\begin{aligned} P_{x,\mathrm{f}} &= (1+3)\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &= 4\,\mathrm{kg\,m/s}, \\ P_{y,\mathrm{f}} &= (1-1)\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &= 0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

よって、衝突直前と直後の全運動量は一致する。

図でも、O から U までの A の運動量と、U から T までの B の運動量を足した結果が、O から T への東向きの全運動量になっている。

図中の U から T へ向かう矢印は右下を向いているため、B の運動量はx成分が正、y成分が負であることも分かる。

演習 2(3) 運動エネルギーの変化

衝突直前は A だけが動いているため、

$$K_{\mathrm{i}} = \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(4\,\mathrm{m/s})^2 = 8\,\mathrm{J}$$

となる。

衝突直後の A の運動エネルギーは、

$$K_{A,\mathrm{f}} = \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})\{(1\,\mathrm{m/s})^2 + (1\,\mathrm{m/s})^2\} = 1\,\mathrm{J}$$

である。

B については、

$$K_{B,\mathrm{f}} = \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})\{(3\,\mathrm{m/s})^2 + (-1\,\mathrm{m/s})^2\} = 5\,\mathrm{J}$$

となる。

よって、衝突直後の全運動エネルギーは、

$$K_{\mathrm{f}} = 1\,\mathrm{J} + 5\,\mathrm{J} = 6\,\mathrm{J}$$

である。

変化量は、

$$K_{\mathrm{f}} - K_{\mathrm{i}} = 6\,\mathrm{J} - 8\,\mathrm{J} = -2\,\mathrm{J}$$

となる。

したがって、全運動エネルギーは2 J減少した。

一方、全運動量は両成分とも保存されている。

運動量保存と運動エネルギー保存は異なる条件であるため、この結果に矛盾はない。減少した運動エネルギーは、変形や内部エネルギーの増加などに変わり得る。

演習 3 の解答・解説

演習 3(1) 衝突直前の全運動量

衝突直前、A は東向き、B は北向きに進んでいる。

そのため、x成分は A だけ、y成分は B だけが持つ。

$$\begin{aligned} P_{x,\mathrm{i}} &= (1\,\mathrm{kg})(4\,\mathrm{m/s}) \\ &= 4\,\mathrm{kg\,m/s}, \\ P_{y,\mathrm{i}} &= (1\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s}) \\ &= 3\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

したがって、衝突直前の全運動量成分は$(4, 3)\,\mathrm{kg\,m/s}$である。

演習 3(2) 全運動量の大きさ

全運動量の大きさは、互いに直交する成分から求める。

$$\begin{aligned} |\,\vec{P}\,| &= \sqrt{(4\,\mathrm{kg\,m/s})^2 + (3\,\mathrm{kg\,m/s})^2} \\ &= 5\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

$4 + 3 = 7$と計算するのは誤りである。二つの成分は互いに直交しているため、大きさは三平方の定理によって求める。

演習 3(3) 合体後の共通速度

合体後の質量は、

$$1\,\mathrm{kg} + 1\,\mathrm{kg} = 2\,\mathrm{kg}$$

である。

x方向の運動量保存より、

$$\begin{aligned} 4\,\mathrm{kg\,m/s} &= (2\,\mathrm{kg})V_x, \\ V_x &= 2\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

y方向についても、

$$\begin{aligned} 3\,\mathrm{kg\,m/s} &= (2\,\mathrm{kg})V_y, \\ V_y &= 1.5\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

よって、共通速度の成分は$(2, 1.5)\,\mathrm{m/s}$である。

速さは、

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{(2\,\mathrm{m/s})^2 + (1.5\,\mathrm{m/s})^2} \\ &= 2.5\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

となる。

演習 3(4) 運動エネルギーの減少

衝突前の全運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{i}} &= \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(4\,\mathrm{m/s})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 8\,\mathrm{J} + 4.5\,\mathrm{J} \\ &= 12.5\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

合体後の全運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{f}} &= \frac{1}{2}(2\,\mathrm{kg})(2.5\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 6.25\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

である。

したがって、減少した運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{i}} - K_{\mathrm{f}} &= 12.5\,\mathrm{J} - 6.25\,\mathrm{J} \\ &= 6.25\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

合体後も全運動量は保存されるが、全運動エネルギーは保存されない。比較している質量は衝突前後とも同じ合計$2\,\mathrm{kg}$であり、減少は系から物体が消えたためではない。

演習 4 の解答・解説

演習 4(1) 時間区間の終わりの全運動量

外力の力積と運動量の変化の関係から、

$$\vec{P}_{\mathrm{f}} - \vec{P}_{\mathrm{i}} = \vec{J}_{\mathrm{ext}}$$

である。

x方向について、

$$\begin{aligned} P_{x,\mathrm{f}} &= 6\,\mathrm{kg\,m/s} + 0\,\mathrm{N\,s} \\ &= 6\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

y方向については、

$$\begin{aligned} P_{y,\mathrm{f}} &= 4\,\mathrm{kg\,m/s} + (-2\,\mathrm{N\,s}) \\ &= 2\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

ここで、$1\,\mathrm{N\,s} = 1\,\mathrm{kg\,m/s}$である。

したがって、時間区間の終わりの全運動量成分は$(6, 2)\,\mathrm{kg\,m/s}$である。

演習 4(2) 方向別の保存可否

x方向では外力の力積が0であるため、

$$P_{x,\mathrm{f}} = P_{x,\mathrm{i}}$$

となり、全運動量のx成分は保存される。

一方、y方向には$-2\,\mathrm{N\,s}$の外力の力積がある。そのため、

$$\begin{aligned} P_{y,\mathrm{f}} - P_{y,\mathrm{i}} &= 2\,\mathrm{kg\,m/s} - 4\,\mathrm{kg\,m/s} \\ &= -2\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となり、y成分は保存されない。

南向きの外力の力積によって、系全体の北向きの運動量成分が減少したのである。

二次元では、外力の力積を成分ごとに調べれば、ある方向では運動量が保存され、別の方向では保存されない場合も判断できる。

演習 4(3) 個々の速度を求められるか

この情報だけでは、A と B それぞれの速度を求めることはできない。

求まったのは系 A+B の全運動量だけであり、各物体への運動量の分配は不明である。

また、A と B の質量や個々の運動量についても、必要な条件が与えられていない。

したがって、全運動量の成分だけから、個々の速度を勝手に決定することはできない。

演習 5 の解答・解説

演習 5(1) 運動量保存の確認

衝突直前の全運動量は、

$$\begin{aligned} P_{x,\mathrm{i}} &= (1\,\mathrm{kg})(4\,\mathrm{m/s}) \\ &= 4\,\mathrm{kg\,m/s}, \\ P_{y,\mathrm{i}} &= 0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

である。

候補として与えられた衝突直後の速度を用いると、

$$\begin{aligned} P_{x,\mathrm{f}} &= (1\,\mathrm{kg})(2\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(1\,\mathrm{kg})(2\,\mathrm{m/s}) \\ &= 4\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

また、

$$\begin{aligned} P_{y,\mathrm{f}} &= (1\,\mathrm{kg})(3\,\mathrm{m/s}) \\ &\quad +(1\,\mathrm{kg})(-3\,\mathrm{m/s}) \\ &= 0\,\mathrm{kg\,m/s} \end{aligned}$$

となる。

したがって、候補の速度はx方向とy方向の運動量保存則をどちらも満たしている。

演習 5(2) 運動エネルギーの比較

衝突直前は A だけが動いているため、

$$K_{\mathrm{i}} = \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})(4\,\mathrm{m/s})^2$$
$$= 8\,\mathrm{J}$$

である。

衝突直後の A の運動エネルギーは、

$$K_{A,\mathrm{f}} = \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})\{(2\,\mathrm{m/s})^2 + (3\,\mathrm{m/s})^2\}$$
$$= 6.5\,\mathrm{J}$$

となる。

B については、

$$K_{B,\mathrm{f}} = \frac{1}{2}(1\,\mathrm{kg})\{(2\,\mathrm{m/s})^2 + (-3\,\mathrm{m/s})^2\}$$
$$= 6.5\,\mathrm{J}$$

である。

よって、衝突直後の全運動エネルギーは、

$$K_{\mathrm{f}} = 6.5\,\mathrm{J} + 6.5\,\mathrm{J}$$
$$= 13\,\mathrm{J}$$

となる。

衝突前と比べると、

$$K_{\mathrm{f}} - K_{\mathrm{i}} = 13\,\mathrm{J} - 8\,\mathrm{J}$$
$$= 5\,\mathrm{J}$$

であり、全運動エネルギーが5 J増加している。

演習 5(3) 候補を採用できるか

この候補は運動量保存則を満たしているが、**本問で指定された通常の衝突条件には適合しない。**

系 A+B に外部からエネルギーが供給されず、内部エネルギーの放出もない通常の衝突では、衝突だけによって全運動エネルギーが増加することはない。

しかし、候補では全運動エネルギーが8 Jから13 Jへ増加している。

したがって、この候補は採用できない。

ただし、一般に内部エネルギーの放出などによって運動エネルギーが増加する衝突まで不可能という意味ではない。

本問で否定できるのは、与えられたエネルギー条件の下でこの候補を実現することである。

演習 5 のまとめ：保存式を満たすことと物理的に実現できること

運動量保存は、衝突後の速度が満たすべき条件の一つである。

保存式に代入して一致しただけで、その候補が問題文のすべての物理条件を満たすとは限らない。

特に、エネルギーに関する条件は運動量保存とは分けて確認する。

演習 6 の解答・解説

演習 6(1) 運動量保存の二つの式

衝突直前、A は東向きに$4\,\mathrm{m/s}$、B は静止している。

衝突直前の全運動量成分は、

$$\left(P_{x,\mathrm{i}}, P_{y,\mathrm{i}}\right) = (4, 0)\,\mathrm{kg\,m/s}$$

である。

衝突中の水平面内外力の力積を無視できるため、両成分が保存される。

x方向について、

$$(1\,\mathrm{kg})v_{Ax} + (1\,\mathrm{kg})v_{Bx} = 4\,\mathrm{kg\,m/s}$$

となる。

y方向については、

$$(1\,\mathrm{kg})v_{Ay} + (1\,\mathrm{kg})v_{By} = 0\,\mathrm{kg\,m/s}$$

となる。

この二つが、運動量保存から得られる方程式である。

演習 6(2) B の速度成分を表す

x方向の式をv_{Bx}について解くと、

$$v_{Bx} = 4\,\mathrm{m/s} - v_{Ax}$$

となる。

また、y方向の式をv_{By}について解くと、

$$v_{By} = -v_{Ay}$$

となる。

したがって、B の速度成分は

$$\left(v_{Bx}, v_{By}\right) = \left(4\,\mathrm{m/s} - v_{Ax}, -v_{Ay}\right)$$

と表される。

これは、A の衝突直後の速度成分が決まれば、運動量保存によって B の速度成分も決まることを示している。

演習 6(3) 条件不足の判断

衝突直後の未知速度成分は、

$$v_{Ax},\quad v_{Ay},\quad v_{Bx},\quad v_{By}$$

の四つである。

一方、運動量保存から得られる独立な方程式はx方向とy方向の二つだけである。

このため、四つの未知数を一意に決定するには条件が不足している。

例えば、運動量保存だけなら、

$$\left(v_{Ax}, v_{Ay}\right) = (4, 0)\,\mathrm{m/s},$$

$$\left(v_{Bx}, v_{By}\right) = (0, 0)\,\mathrm{m/s}$$

という組も、

$$\left(v_{Ax}, v_{Ay}\right) = (2, 0)\,\mathrm{m/s},$$

$$\left(v_{Bx}, v_{By}\right) = (2, 0)\,\mathrm{m/s}$$

という組も、全運動量の成分が$(4, 0)\,\mathrm{kg\,m/s}$となり、二つの運動量保存式を満たす。

したがって、運動量保存式だけでは、これらを区別できない。

追加情報としては、例えば次のようなものが考えられる。

- 衝突直後の A の速度ベクトルが与えられる。
- 衝突後に二つの物体が合体して共通速度を持つと指定される。
- 弾性衝突であることなど、エネルギーに関する条件が与えられる。

ただし、弾性衝突であるという条件が追加されたとしても、一般には運動量保存の二式とエネルギー保存の一式だけで、四つの未知速度成分がすべて一意に決まるとは限らない。

重要なのは、条件を勝手に補うのではなく、**与えられた法則と追加条件によって何が決まり、何がまだ決まらないかを区別すること**である。