

第 69 講 約数・倍数と整数

学習目標

- ・ 整数、約数、倍数の意味を説明できる。
- ・ 「 a が b の約数である」という関係を、 $b = ak$ の形で判断できる。
- ・ 正の整数の正の約数を、もれなく列挙できる。
- ・ 約数と倍数が同じ式を反対の立場から見た関係であることを理解できる。
- ・ 0 が約数や倍数としてどのように扱われるかを区別できる。

整数とは何か

整数

整数とは、

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

のような数である。

整数には、正の整数、0、負の整数が含まれる。

正の整数だけを扱う場面もある

約数を列挙する問題では、「正の約数」を考えることが多い。

たとえば 12 の正の約数は、

$$1, 2, 3, 4, 6, 12$$

である。

$-1, -2, -3, -4, -6, -12$ も整数としては 12 を割り切るが、「正の約数」には含めない。

問題文が「正の約数」と指定しているかを確認することが重要である。

約数とは何か

約数

整数 a が整数 b の約数であるとは、ある整数 k を用いて、

$$b = ak$$

と表せることである。

この講では、約数として扱う a は 0 ではないものとする。

3 が 12 の約数である理由

12 は、

$$12 = 3 \cdot 4$$

と表せる。

4 は整数なので、3 は 12 の約数である。

同じように、

$$12 = 4 \cdot 3$$

なので、4 も 12 の約数である。

約数の向きを確認する

「 a が b の約数である」とは、

$$b = a \times \text{整数}$$

と表せるという意味である。

たとえば、

- 3 は 12 の約数である。
- 12 は 3 の約数ではない。

この 2 つを逆にしないことが重要である。

大きい数が小さい数の約数になるとは限らない

12 は 3 の倍数ではあるが、3 の約数ではない。

実際、

$$3 = 12k$$

を満たす整数 k は存在しない。

したがって、12 は 3 の約数ではない。

倍数とは何か**倍数**

整数 b が整数 a の倍数であるとは、ある整数 k を用いて、

$$b = ak$$

と表せることである。

約数と倍数は同じ式を見る

たとえば、

$$20 = 5 \cdot 4$$

である。

この式から、

- 5 は 20 の約数である。
- 20 は 5 の倍数である。

という 2 つのことが分かる。

約数と倍数は、同じ関係を反対側から見た言葉である。

約数と倍数の対応

$$b = ak$$

と表せるとき、

- a は b の約数である。
- b は a の倍数である。

といえる。

倍数を並べる

4 の倍数

4 の倍数は、

$$4k$$

の形で表せる整数である。

たとえば $k = 0, 1, 2, 3, 4$ とすると、

$$0, 4, 8, 12, 16$$

を得る。

負の整数も考えるなら、

$$\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots$$

も 4 の倍数である。

倍数には 0 も含まれる

$0 = 4 \cdot 0$ なので、0 は 4 の倍数である。

同じ理由で、0 はどの 0 でない整数の倍数でもある。

一方、「正の倍数」を求める問題では 0 を含めない。

正の約数を列挙する

かけ算の組を探す

18 の正の約数を求める。

正の整数の組で 18 になるかけ算を、小さい方から探す。

$$18 = 1 \cdot 18$$

$$18 = 2 \cdot 9$$

$$18 = 3 \cdot 6$$

したがって、18 の正の約数は、

$$1, 2, 3, 6, 9, 18$$

である。

かけ算の組を利用すると、約数をもれなく整理しやすい。

約数は組になって現れる

正の整数 n について、

$$n = a \cdot b$$

となる正の整数 a, b があれば、 a と b はどちらも n の正の約数である。

約数を列挙するときは、

1. 1 から順に割り切れるか調べる。
2. 割り切れたら、対応する相手の数を書く。
3. 同じ約数を重複して書かない。

という方法が使える。

24 の正の約数

約数の組を整理する

24 を正の整数の積として表すと、

小さい方	大きい方	積
1	24	24
2	12	24
3	8	24
4	6	24

となる。

したがって、24 の正の約数は、

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$$

である。

途中で飛ばさない

24 について、1, 2, 3, 4 が割り切れることだけを確認して終えてはいけない。
それぞれに対応する、

$$24, 12, 8, 6$$

も正の約数である。

約数を小さい順に並べ直すと、もれを確認しやすい。

1 と自分自身は必ず正の約数

正の整数の基本的な約数

正の整数 n について、

$$n = 1 \cdot n$$

である。

したがって、1 と n は必ず n の正の約数である。

たとえば 17 についても、

$$17 = 1 \cdot 17$$

なので、少なくとも 1 と 17 は正の約数である。

この講では、それ以上の分類には進まず、約数を正しく見つけることに集中する。

0 の扱い

0 は約数として扱わない

この講では、「 a が b の約数である」というとき、 a は 0 でない整数とする。

したがって、0 を整数の約数として扱わない。

たとえば「0 は 12 の約数である」とはしない。

0 は 0 でない整数の倍数になる

一方、0 は任意の 0 でない整数 a に対して、

$$0 = a \cdot 0$$

と表せる。

したがって、0 はどの 0 でない整数の倍数でもある。

また、0 でない整数 a について、

$$0 = a \cdot 0$$

なので、 a は 0 の約数である。

0 について整理する

この講では次のように扱う。

内容	判断
0 は 6 の倍数か	そうである
6 は 0 の約数か	そうである
0 は 6 の約数か	そうではない
正の約数に 0 を含めるか	含めない

「約数」と「倍数」のどちらを問われているかを確認する必要がある。

約数か倍数かを判断する

式に直して確かめる

「7 は 42 の約数であるか」を考える。

$$42 = 7 \cdot 6$$

と表せるので、7 は 42 の約数である。

同時に、42 は 7 の倍数である。

次に、「8 は 42 の約数であるか」を考える。

42 を 8 と整数の積では表せないので、8 は 42 の約数ではない。

判断手順

「 a が b の約数であるか」を判断するときは、

1. b を a で割り切れるか確認する。
2. または $b = ak$ となる整数 k が存在するか確認する。
3. 存在すれば a は b の約数である。
4. 同時に b は a の倍数である。

と考える。

例題

例題 1

30 の正の約数をすべて小さい順に列挙せよ。

例題 1 の解答・解説

30 になる正の整数の積を、小さい方から調べる。

$$30 = 1 \cdot 30$$

$$30 = 2 \cdot 15$$

$$30 = 3 \cdot 10$$

$$30 = 5 \cdot 6$$

したがって、30 の正の約数は、

1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

である。

例題 2

次の文が正しいか答え、理由を述べよ。

(1) 6 は 48 の約数である。

(2) 48 は 6 の約数である。

(3) 48 は 6 の倍数である。

例題 2 の解答・解説

$$48 = 6 \cdot 8$$

である。

したがって、6 は 48 の約数であり、48 は 6 の倍数である。

よって、

(1) は正しい。

(2) は正しくない。6 を 48 と整数の積では表せないからである。

(3) は正しい。

例題 3

0 について、次を答えよ。

(1) 0 は 9 の倍数であるか。

(2) 9 は 0 の約数であるか。

(3) 0 は 9 の約数であるか。

例題 3 の解答・解説

(1)

$$0 = 9 \cdot 0$$

と表せるので、0 は 9 の倍数である。

(2)

同じ式から、9 は 0 の約数である。

(3)

この講では 0 を約数として扱わないので、0 は 9 の約数ではない。

演習問題

練習問題 1

20 の正の約数をすべて小さい順に列挙せよ。

練習問題 2

36 の正の約数をすべて小さい順に列挙せよ。

練習問題 3

次の数のうち、45 の正の約数であるものをすべて選べ。

2, 3, 5, 6, 9, 15, 45

練習問題 4

次の文が正しいか答えよ。

- (1) 4 は 28 の約数である。
- (2) 28 は 4 の倍数である。
- (3) 5 は 28 の約数である。

練習問題 5

6 の 0 以上 30 以下の倍数をすべて列挙せよ。

練習問題 6

整数 a, b について、

$$b = 7a$$

である。

a と b の約数・倍数の関係を、「約数」と「倍数」という語を用いて述べよ。ただし a は 0 でないものとする。

練習問題 7

次の空欄に入る整数を求め、約数と倍数の関係を述べよ。

$$56 = 8 \cdot (\text{整数})$$

練習問題 8

ある生徒は、「 $12 = 3 \cdot 4$ だから、12 は 3 の約数である」と述べた。
誤りを説明し、正しい関係を述べよ。

練習問題 9

次の各文について正しいか答え、理由を述べよ。

- (1) 0 は 7 の倍数である。
- (2) 7 は 0 の約数である。
- (3) 0 は 7 の正の約数である。
- (4) 1 は 25 の正の約数である。

演習問題の解答・解説**練習問題 1 の解答・解説**

20 になる正の整数の積を調べる。

$$20 = 1 \cdot 20$$

$$20 = 2 \cdot 10$$

$$20 = 4 \cdot 5$$

したがって、20 の正の約数は、

$$1, 2, 4, 5, 10, 20$$

である。

練習問題 2 の解答・解説

36 になる正の整数の積を調べる。

$$36 = 1 \cdot 36$$

$$36 = 2 \cdot 18$$

$$36 = 3 \cdot 12$$

$$36 = 4 \cdot 9$$

$$36 = 6 \cdot 6$$

したがって、36 の正の約数は、

$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$$

である。

6・6 では同じ約数 6 が現れるため、6 を 2 回書かない。

練習問題 3 の解答・解説

45 について、

$$45 = 3 \cdot 15$$

$$45 = 5 \cdot 9$$

である。

したがって、与えられた数のうち 45 の正の約数は、

$$3, 5, 9, 15, 45$$

である。

2 と 6 は 45 を割り切らないため、正の約数ではない。

練習問題 4 の解答・解説

$$28 = 4 \cdot 7$$

である。

したがって、

(1) 4 は 28 の約数なので正しい。

(2) 28 は 4 の倍数なので正しい。

(3) 28 を 5 と整数の積では表せないので正しくない。

練習問題 5 の解答・解説

6 の倍数は $6k$ の形で表せる。

0 以上 30 以下では、

$$0, 6, 12, 18, 24, 30$$

である。

0 も、

$$0 = 6 \cdot 0$$

と表せるので 6 の倍数に含まれる。

練習問題 6 の解答・解説

$$b = 7a$$

であり、7 は整数である。

したがって、 a は b の約数であり、 b は a の倍数である。

練習問題 7 の解答・解説

$$56 = 8 \cdot 7$$

なので、空欄に入る整数は 7 である。

この式から、8 は 56 の約数であり、56 は 8 の倍数である。

練習問題 8 の解答・解説

$$12 = 3 \cdot 4$$

という式から分かるのは、3 が 12 の約数であるということである。

同時に、12 は 3 の倍数である。

したがって、「12 は 3 の約数である」という部分で向きが逆になっている。

正しくは、

・ 3 は 12 の約数である。

・ 12 は 3 の倍数である。

となる。

練習問題 9 の解答・解説

(1) 正しい。

$$0 = 7 \cdot 0$$

と表せるので、0 は 7 の倍数である。

(2) 正しい。

同じ式から、7 は 0 の約数である。

(3) 正しくない。

この講では 0 を約数として扱わず、さらに 0 は正の整数でもないので、7 の正の約数にはならない。

(4) 正しい。

$$25 = 1 \cdot 25$$

であるため、1 は 25 の正の約数である。