

第 181 講 片側極限

学習目標

この講では、次のことができるようになることを目標とする。

- ・ 入力のある点の左側または右側に制限して近づける考え方を理解する。
- ・ 左極限と右極限の記号の意味を説明できる。
- ・ 左右の極限が一致するときだけ両側極限が存在することを判断できる。
- ・ 関数の値と、その点に近づいたときの極限値を区別できる。
- ・ 定義域の端では、定義されている側だけの極限を考えられる。

片側から近づくという考え方

関数の極限では、ある点 a に近づくときの関数の値の変化を見る。

ただし、点 a へ近づく方法は 1 つではない。入力する値を a より小さい側から近づけることもでき、 a より大きい側から近づけることもできる。

例えば、 x が a に近づくとき、 $x < a$ の値だけを使って近づく場合を左側から近づくといい、 $x > a$ の値だけを使って近づく場合を右側から近づくという。

片側極限では、入力の範囲を一方の側に制限することが重要である。極限値は、点そのものの関数値ではなく、その点へ近づく入力での関数値の変化によって決まる。

片側極限の定義

a と L を有限実数とする。 a に近づく側を一方に制限して、関数 $f(x)$ の値の変化を見る。

左側からの極限では、ある $r > 0$ が存在して、 $a - r < x < a$ を満たすすべての x で $f(x)$ が定義されていることを前提とする。このとき、 $x < a$ かつ $x \neq a$ の入力だけで x を a に近づけたとき、 $f(x)$ が L に近づくことを $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ と書く。

右側からの極限では、ある $r > 0$ が存在して、 $a < x < a + r$ を満たすすべての x で $f(x)$ が定義されていることを前提とする。このとき、 $x > a$ かつ $x \neq a$ の入力だけで x を a に近づけたとき、 $f(x)$ が L に近づくことを $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ と書く。

片側極限とは、任意の正の誤差に対して、その誤差より小さいずれになるような十分近い範囲を決める考え方である。つまり、左極限なら a の左側、右極限なら a の右側にある十分近いすべての入力 x で、 $f(x)$ が L からその誤差未満になることを意味する。

ここで a^- や a^+ の符号は、関数値の正負を表すものではない。 a より小さい側から近づくか、 a より大きい側から近づくかを表している。

片側極限で見える場所

片側極限では、入力する x の範囲を決めてから極限を考える。

- ・ 左極限では $x < a$ の入力だけを見る。
- ・ 右極限では $x > a$ の入力だけを見る。
- ・ $x = a$ の点での値 $f(a)$ は、片側極限とは別に考える。

極限が存在するとは、どれだけ小さい誤差を指定されても、その誤差の範囲に入るような十分近い入力の範囲を決められるという意味である。

例えば、 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ なら、任意に小さい正の誤差に対して、 $x < a$ で a に十分近いすべての x で $f(x)$ が L からその誤差以内に入る。

両側極限との関係

a の両側の十分近い範囲で、 a 以外のすべての実数入力について関数 $f(x)$ が定義されているとする。

この前提のもとで、有限な両側極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ が存在することと、左極限と右極限がともに存在して同じ有限値 L になることは同値である。

つまり、 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ かつ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ であるとき、かつそのときに限り、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ が存在する。

左右の極限が異なる場合、どちら側から近づくかで結果が変わるため、両側極限は存在しない。
なお、片側だけで関数が定義された端点では、両側近傍で定義されるというこの前提を満たさないため、その側の片側極限だけを考える。

注意

片側極限を決めるのは、対応する側にある a 以外の近傍値での関数の変化であり、点での値 $f(a)$ ではない。

したがって、 $f(a)$ は左右極限と一致してもよく、一致しなくてもよく、定義されていなくても片側極限を考えられる場合がある。

例えば、左右から近づいた結果が同じ値でも、点での関数値だけが異なることがある。

また、端点で片側極限を考えると、その側の十分近い入力で関数が定義されているかを確認する必要がある。定義されていない側へ入力を近づけて極限を作ってはいけない。

例題 1

関数 $f(x) = |x|$ について、 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ を求め、さらに $f(0)$ との関係の説明しなさい。

例題 1 の解答・解説

$|x|$ は、 x の符号によって形が変わる。

左側から近づく場合は $x < 0$ であるため、 $|x| = -x$ となる。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) \\ &= 0\end{aligned}$$

右側から近づく場合は $x > 0$ であるため、 $|x| = x$ となる。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \\ &= 0\end{aligned}$$

左右の極限はともに 0 で一致するため、両側極限も存在する。

したがって、 $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ である。

また、 $f(0) = |0| = 0$ であり、この例では極限值と関数値が一致している。

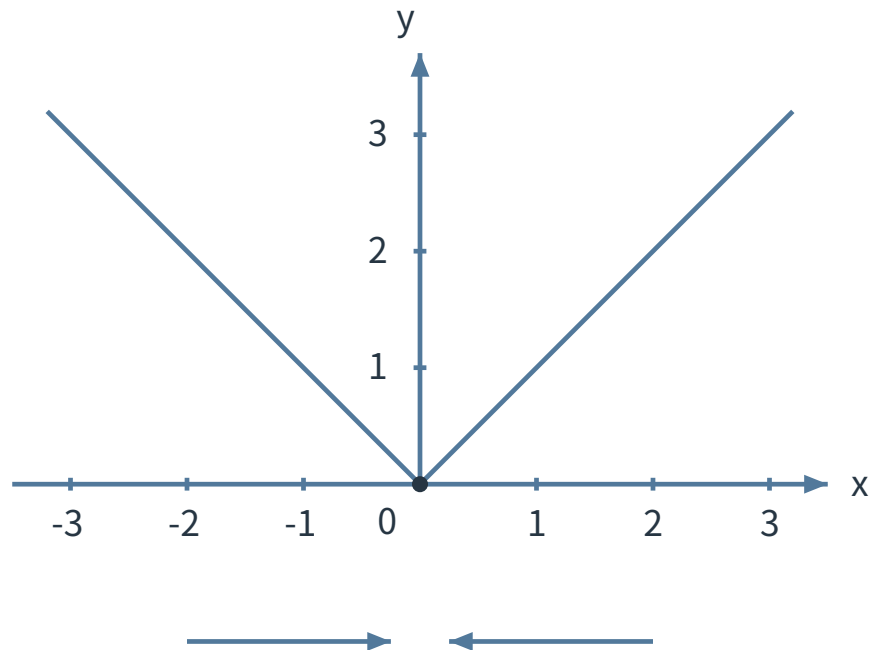


図1 実線は $y=|x|$ のグラフの一部である。横軸の下矢印は、 x を 0 へ左側と右側から近づける向きを示す。どちらの側からも y は 0 へ近づき、左右極限はともに 0 である。黒点は $f(0)=0$ を表す。有限の図だけで証明せず、本文の式による確認と合わせて読む。

例題 2

全実数上で定義された関数 $f(x)$ が次の条件を満たすとする。

- $x < 0$ のとき、 $f(x) = x + 1$
- $x > 0$ のとき、 $f(x) = x + 3$
- $x = 0$ のとき、 $f(0) = 2$

このとき、 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 、 $f(0)$ を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

左側では $x < 0$ なので、 $f(x) = x + 1$ を使う。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) \\ &= 1\end{aligned}$$

右側では $x > 0$ なので、 $f(x) = x + 3$ を使う。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 3) \\ &= 3\end{aligned}$$

左右の極限を比較すると、左極限は 1、右極限は 3 で異なる。

したがって、 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ は存在しない。

一方、点 $x = 0$ での関数値は定義から $f(0) = 2$ である。

この例では、左極限、右極限、両側極限、関数値がすべて異なる役割を持つことが分かる。

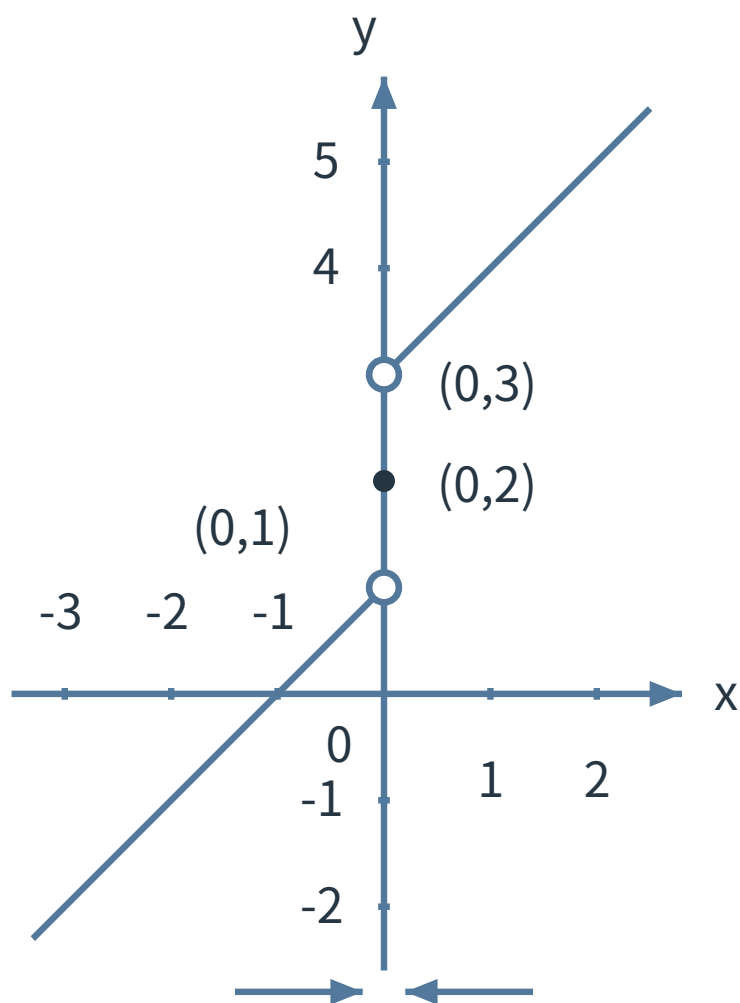


図 2 $x < 0$ では $f(x)=x+1$ 、 $x > 0$ では $f(x)=x+3$ であり、 $f(0)=2$ である。白丸 $(0,1)$ と $(0,3)$ は各枝に含まれない端の位置、黒点 $(0,2)$ は点での関数値を表す。横軸の下矢印の向きに x を 0 へ近づけると、左極限は 1、右極限は 3 となり、点の値 2 と異なる。白丸の円周は除外の記号であり、関数曲線ではない。曲線は全体の一部だけを表示している。

例題 3

関数 $f(x) = \sqrt{x}$ について、 $x \rightarrow 0^+$ の極限を求め、左側からの極限を考えられるか説明しなさい。

例題 3 の解答・解説

$f(x) = \sqrt{x}$ は主平方根を表し、実数の範囲では $x \geq 0$ で定義される。

したがって、 x を 0 の右側から近づけることができる。

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ である。

この理由は、任意の正の数 ε に対して、 $0 < x < \varepsilon^2$ となるような十分小さい範囲を取れるためである。

$0 < \sqrt{x} < \varepsilon$ がその範囲にあるすべての入力で成り立つため、 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ となる。

一方、左側では $x < 0$ となり、 $\sqrt{x}$ は実数値関数として定義されない。そのため、 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$ を 0 とすることはできない。

本講で扱う両側極限の前提である、0 の両側の十分近い入力で関数が定義される条件を満たさないため、この場合は右側の片側極限だけを考える。

演習問題

練習問題 1

次の極限を求めなさい。

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3x + 4)$$

練習問題 2

関数 $f(x)$ を次の条件で定める。

- $x < 1$ のとき、 $f(x) = 2x + 3$
- $x > 1$ のとき、 $f(x) = x^2 + 1$
- $x = 1$ のとき、 $f(1) = 5$

このとき、 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 、 $f(1)$ を求めなさい。

練習問題 3

関数 $f(x)$ を $x \neq 0$ の範囲で次のように定める。

$f(x) = \frac{|x|}{x}$ このとき、 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ を求めなさい。

ただし、 $x = 0$ での関数値は定義しない。

練習問題 4

関数 $f(x)$ を次の条件で定める。

- $x < -3$ のとき、 $f(x) = x^2$
- $x > -3$ のとき、 $f(x) = x + 6$
- $x = -3$ のとき、 $f(-3) = 0$

(1) x を -3 に右から近づける入力として、 -2.9 と -3.1 のどちらが適切か。理由を答えなさい。

(2) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ を求めなさい。

練習問題 5

定義域を全実数とする関数 $f(x)$ を次の条件で定める。

- $x < 0$ のとき、 $f(x) = ax + 2$
- $x > 0$ のとき、 $f(x) = x + 5$
- $x = 0$ のとき、 $f(0) = 7$

ただし、 a は実定数である。

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ が存在するような a はあるか。ある場合は a とその極限値を求め、ない場合は理由を述べなさい。

練習問題 6

関数 $f(x) = \sqrt{x+1}$ について、 $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ を求めなさい。また、 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ を考えることができるか説明しなさい。

練習問題 7

関数 $f(x)$ を次の条件で定める。

- $x < 2$ のとき、 $f(x) = 4$
- $x > 2$ のとき、 $f(x) = 4$
- $x = 2$ のとき、 $f(2) = -1$

このとき、 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ 、 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 、 $f(2)$ の関係を説明しなさい。

練習問題 8

定義域を全実数から 3 を除いた範囲とし、関数 $f(x)$ を次の条件で定める。

- $x < 3$ のとき、 $f(x) = x^2 - 4$
- $x > 3$ のとき、 $f(x) = bx - 10$

ただし、 b は実定数である。

両側極限 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ が存在するような b と、そのときの極限値を求めなさい。

練習問題 1 の解答・解説

x は 2 より小さい側から 2 に近づくと、式 $x^2 - 3x + 4$ は多項式なので左右どちらから近づいても同じ値へ近づく。

したがって、 $x = 2$ を代入して考える。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3x + 4) &= 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

よって、極限値は 2 である。

練習問題 2 の解答・解説

左側では $x < 1$ なので、 $f(x) = 2x + 3$ を使う。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 3) \\ &= 5\end{aligned}$$

右側では $x > 1$ なので、 $f(x) = x^2 + 1$ を使う。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1) \\ &= 2\end{aligned}$$

左極限と右極限が異なるため、 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ は存在しない。

また、点での値は定義より $f(1) = 5$ である。

したがって、左極限は 5、右極限は 2、両側極限は存在せず、関数値は 5 である。

練習問題 3 の解答・解説

$x < 0$ のとき、 $|x| = -x$ なので、 $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$ となる。

したがって、 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ である。

$x > 0$ のとき、 $|x| = x$ なので、 $f(x) = \frac{x}{x} = 1$ となる。

したがって、 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ である。

左右の極限が異なるため、 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ は存在しない。

また、 $x = 0$ では関数が定義されていないため、0 を代入して考えることはできない。

練習問題 4 の解答・解説

(1) 右から近づけるとは、 -3 より大きい値から近づけることである。

したがって、 $x > -3$ を満たす -2.9 が適切である。負の数であっても、 -3 より大きければ右側の入力になる。

(2) 左側では $x < -3$ なので、 $f(x) = x^2$ を使う。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^-} x^2 \\ &= 9\end{aligned}$$

右側では $x > -3$ なので、 $f(x) = x + 6$ を使う。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3^+} (x + 6) \\ &= 3\end{aligned}$$

左右の極限が異なるため、 $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ は存在しない。

また、 $f(-3) = 0$ は点での値であり、左右極限とは別に考える。

練習問題 5 の解答・解説

両側極限を存在させるには、左極限と右極限を一致させる必要がある。
左側では、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax + 2) \\ &= 2\end{aligned}$$

右側では、次のように計算する。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 5) \\ &= 5\end{aligned}$$

左極限と右極限は常に 2 と 5 で異なる。
したがって、どのような a を選んでも $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ は存在しない。

練習問題 6 の解答・解説

$f(x) = \sqrt{x+1}$ は主平方根を表し、実数の範囲では $x \geq -1$ で定義される。
したがって、右側から近づくことができる。

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{x+1} = 0$ である。

この理由は、 $t = x + 1$ とおくと、 $x > -1$ のとき $t > 0$ となり、 $x \rightarrow -1^+$ は $t \rightarrow 0^+$ と同じ状況になるためである。

一方、左側では $x < -1$ となり、 $\sqrt{x+1}$ は実数値関数として定義されない。

そのため、 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ を 0 とすることはできない。この場合は、本講の両側近傍で関数が定義される前提を満たさず、右側の片側極限だけを考える。

練習問題 7 の解答・解説

左右どちらから近づいても、 $f(x) = 4$ である。

したがって、 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$ かつ、 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$ である。

左右の極限が一致するため、 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ となる。

しかし、点での値は定義より $f(2) = -1$ である。

このように、極限值と関数値は独立しており、異なる値でもよい。

練習問題 8 の解答・解説

左側では $x < 3$ なので、 $f(x) = x^2 - 4$ を使う。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 4) \\ &= 5\end{aligned}$$

右側では $x > 3$ なので、 $f(x) = bx - 10$ を使う。

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (bx - 10) \\ &= 3b - 10\end{aligned}$$

両側極限が存在するには、左右の極限が一致する必要がある。

$5 = 3b - 10$ より、 $3b = 15$ となるので、 $b = 5$ である。

このとき、極限值は 5 である。

また、 $x = 3$ では定義していないため、 $f(3)$ は存在しない。