

第 46 講 角の二等分線と辺の比

学習目標

- 三角形の内角の二等分線が、向かいの辺をどのような比に分けるか説明できる。
- 角の二等分線の定理を使って、分けられた辺の比を求められる。
- 辺の長さから、分けられた線分の長さを求められる。
- 比の対応を正しく読み取り、比例式を使って未知の長さを求められる。

角の二等分線は向かいの辺を特別な比に分ける

角を半分にすると対辺はどう分かれるか

三角形 ABC で、点 D が辺 BC 上にあり、線分 AD が $\angle A$ を二等分しているとします。
つまり、

$$\angle BAD = \angle DAC$$

です。

このとき、点 D は辺 BC のちょうど中央になるとは限りません。

AB と AC の長さが違えば、 BD と DC の長さも違います。

実は、 AD が角の二等分線であるとき、辺 BC は両隣の辺 AB, AC と同じ比に分けられます。

角の二等分線の定理

三角形 ABC で、点 D が辺 BC 上にあり、

$$\angle BAD = \angle DAC$$

であるとします。

このとき、

$$AB : AC = BD : DC$$

が成り立ちます。

これを角の二等分線の定理といいます。

対応をそのまま読む

角の二等分線 AD によって、

- $\angle A$ の一方の辺 AB に対応するのが BD
- $\angle A$ のもう一方の辺 AC に対応するのが DC

です。

したがって、

$$AB : AC = BD : DC$$

と対応させます。

AB と DC を対応させない

よくある誤りは、

$$AB : AC = DC : BD$$

としてしまうことです。

AB 側にある対辺の部分は BD 、 AC 側にある対辺の部分は DC です。

図を見たときは、角の頂点 A から左側・右側の対応を順に確認します。

なぜ同じ比になるのか

2つの小さな三角形の面積を比べる

角の二等分線 AD によって、三角形 ABC は三角形 ABD と三角形 ACD に分かれます。

この2つの三角形は、底辺をそれぞれ BD, DC と見ると、高さが共通です。

したがって、面積の比は

$$\triangle ABD : \triangle ACD = BD : DC$$

です。

一方、2辺とその間の角を使った面積を考えると、 $\angle BAD = \angle DAC$ なので、面積の比は

$$\triangle ABD : \triangle ACD = AB : AC$$

となります。

したがって、

$$AB : AC = BD : DC$$

が成り立ちます。

定理の意味

角を等しく2つに分けると、向かいの辺も単純に半分になるのではなく、

角をはさむ2辺の長さの比と同じ比

に分けられます。

比だけを求める

両隣の辺が分かればすぐに決まる

三角形 ABC で、 AD が $\angle A$ の二等分線とします。

たとえば、

$$AB = 6, \quad AC = 9$$

なら、角の二等分線の定理より、

$$BD : DC = 6 : 9$$

です。

比を簡単にすると、

$$BD : DC = 2 : 3$$

となります。

このように、対辺の実際の長さが分からなくても、 AB と AC が分かれば $BD : DC$ を求められます。

比はできるだけ簡単にする

$BD : DC = 6 : 9$ でも関係は正しいですが、通常は共通の数で割って、

$$BD : DC = 2 : 3$$

と簡単な整数比で表します。

対辺全体の長さから各部分を求める**比に分けてから全体を使う**

三角形 ABC で、

$$AB : AC = 2 : 3$$

かつ、

$$BC = 15$$

とします。

AD が $\angle A$ の二等分線なら、

$$BD : DC = 2 : 3$$

です。

辺 BC 全体を $2 + 3 = 5$ 等分したと考えると、1 つ分は

$$15 \div 5 = 3$$

です。

したがって、

$$BD = 2 \cdot 3 = 6$$

$$DC = 3 \cdot 3 = 9$$

となります。

全体の長さが分かるときの手順

$BD : DC = m : n$ 、 $BC = L$ のときは、

1. 比の合計 $m + n$ を求める。
2. L を $m + n$ で割って 1 つ分を求める。
3. それぞれ m, n 倍する。

という流れで BD, DC を求められます。

比例式から未知の長さを求める**4 つの長さの対応をそろえる**

三角形 ABC で AD が $\angle A$ の二等分線とし、

$$AB = 8, \quad AC = 12, \quad BD = 6$$

とします。

角の二等分線の定理より、

$$8 : 12 = 6 : DC$$

です。

左の比を $2 : 3$ にすると、

$$2 : 3 = 6 : DC$$

です。

2 が 6 の 3 倍なので、3 も 3 倍して、

$$DC = 9$$

と分かります。

未知数があるとき

角の二等分線の定理を使う問題では、最初に

$$AB : AC = BD : DC$$

を書いてから、分かっている長さを対応する位置へ入れるとミスを防ぎやすくなります。

角の二等分線であることを確認する

点 D が辺 BC 上にあるだけでは、

$$AB : AC = BD : DC$$

とは限りません。

この定理を使うには、 AD が $\angle A$ の二等分線であること、つまり

$$\angle BAD = \angle DAC$$

という条件が必要です。

例題

例題 1

三角形 ABC で、 AD は $\angle A$ の二等分線であり、点 D は辺 BC 上にあります。

$$AB = 10, \quad AC = 15$$

のとき、 $BD : DC$ を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

角の二等分線の定理より、

$$AB : AC = BD : DC$$

です。

したがって、

$$BD : DC = 10 : 15 = 2 : 3$$

です。

例題 2

三角形 ABC で、 AD は $\angle A$ の二等分線です。

$$AB : AC = 3 : 5, \quad BC = 24$$

のとき、 BD と DC を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

角の二等分線の定理より、

$$BD : DC = 3 : 5$$

です。

比の合計は $3 + 5 = 8$ なので、1 つ分は

$$24 \div 8 = 3$$

です。

したがって、

$$BD = 3 \cdot 3 = 9$$

$$DC = 5 \cdot 3 = 15$$

です。

例題 3

三角形 ABC で、 AD は $\angle A$ の二等分線です。

$$AB = 6, \quad AC = 9, \quad BD = 4$$

のとき、 DC を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

角の二等分線の定理より、

$$6 : 9 = 4 : DC$$

です。

$6 : 9 = 2 : 3$ なので、

$$2 : 3 = 4 : DC$$

です。

2 から 4 へ 2 倍しているの、3 も 2 倍します。

したがって、

$$DC = 6$$

です。

演習問題

練習問題 1

三角形 ABC で、 AD は $\angle A$ の二等分線です。

$$AB = 8, \quad AC = 12$$

のとき、 $BD : DC$ を最も簡単な整数比で求めなさい。

練習問題 2

三角形 ABC で、 AD は $\angle A$ の二等分線です。

$$AB = 14, \quad AC = 21$$

のとき、 $BD : DC$ を求めなさい。

練習問題 3

三角形 ABC で、 AD は $\angle A$ の二等分線です。

$$AB : AC = 2 : 5, \quad BC = 21$$

のとき、 BD と DC を求めなさい。

練習問題 4

三角形 ABC で、 AD は $\angle A$ の二等分線です。

$$AB : AC = 4 : 3, \quad BC = 28$$

のとき、 BD と DC を求めなさい。

練習問題 5

三角形 ABC で、 AD は $\angle A$ の二等分線です。

$$AB = 5, \quad AC = 8, \quad BD = 10$$

のとき、 DC を求めなさい。

練習問題 6

三角形 ABC で、 AD は $\angle A$ の二等分線です。

$$AB = 9, \quad AC = 6, \quad DC = 8$$

のとき、 BD を求めなさい。

練習問題 7

三角形 ABC で、 AD は $\angle A$ の二等分線です。

$$BD = 6, \quad DC = 10, \quad AB = 9$$

のとき、 AC を求めなさい。

練習問題 8

ある生徒は、三角形 ABC で AD が $\angle A$ の二等分線で、

$$AB = 6, \quad AC = 10$$

であるとき、

$$BD : DC = 10 : 6$$

と答えました。

この答えの誤りを説明し、正しい比を求めなさい。

練習問題 9

三角形 ABC の辺 BC 上に点 D があります。

$$AB = 12, \quad AC = 8, \quad BD = 9, \quad DC = 6$$

です。

これらの長さは、 AD が $\angle A$ の二等分線である場合の角の二等分線の定理と矛盾しないか確認しなさい。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

角の二等分線の定理より、

$$BD : DC = AB : AC = 8 : 12$$

です。

したがって、

$$BD : DC = 2 : 3$$

です。

練習問題 2 の解答・解説

角の二等分線の定理より、

$$BD : DC = 14 : 21$$

です。

両方を 7 で割ると、

$$BD : DC = 2 : 3$$

です。

練習問題 3 の解答・解説

$BD : DC = 2 : 5$ です。

比の合計は 7 なので、1 つ分は

$$21 \div 7 = 3$$

です。

したがって、

$$BD = 6, \quad DC = 15$$

です。

練習問題 4 の解答・解説

$BD : DC = 4 : 3$ です。

比の合計は 7 なので、1 つ分は

$$28 \div 7 = 4$$

です。

したがって、

$$BD = 16, \quad DC = 12$$

です。

練習問題 5 の解答・解説

角の二等分線の定理より、

$$5 : 8 = 10 : DC$$

です。

5 から 10 へ 2 倍しているので、8 も 2 倍します。

したがって、

$$DC = 16$$

です。

練習問題 6 の解答・解説

角の二等分線の定理より、

$$9 : 6 = BD : 8$$

です。

$9 : 6 = 3 : 2$ なので、

$$3 : 2 = BD : 8$$

です。

2 から 8 へ 4 倍しているので、

$$BD = 12$$

です。

練習問題 7 の解答・解説

角の二等分線の定理より、

$$AB : AC = BD : DC$$

です。

したがって、

$$9 : AC = 6 : 10 = 3 : 5$$

です。

3 から 9 へ 3 倍しているのに、5 も 3 倍します。

よって、

$$AC = 15$$

です。

練習問題 8 の解答・解説

AB に対応するのは BD 、 AC に対応するのは DC です。

したがって、

$$AB : AC = BD : DC$$

なので、

$$BD : DC = 6 : 10 = 3 : 5$$

です。

10 : 6 としたのは、 BD と DC の対応を逆にしたことが誤りです。

練習問題 9 の解答・解説

辺の比を求めると、

$$AB : AC = 12 : 8 = 3 : 2$$

です。

一方、

$$BD : DC = 9 : 6 = 3 : 2$$

です。

2 つの比が一致しています。

したがって、与えられた長さは、 AD が $\angle A$ の二等分線である場合の角の二等分線の定理と矛盾しません。