第 234 講 空間ベクトルと成分

学習目標

- 空間ベクトルを 3 つの成分で表し、成分の意味を説明できる。
- ベクトルの相等、加法、減法、実数倍を成分で計算できる。
- ベクトルの大きさと単位ベクトルを求められる。
- 2 点の座標から、その 2 点を始点・終点とするベクトルを求められる。

1. 空間の移動を 3 つの成分で記録する

空間ベクトルの成分

空間で、向きと大きさをもつ量を空間ベクトルという。あるベクトル $\vec{a}$ が、x 軸の正の向きに a_1、y 軸の正の向きに a_2、z 軸の正の向きに a_3 だけ進む移動を表すとき、

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

と書く。a_1, a_2, a_3 をそれぞれ x 成分、y 成分、z 成分という。負の成分は、その軸の負の向きへの移動を表す。

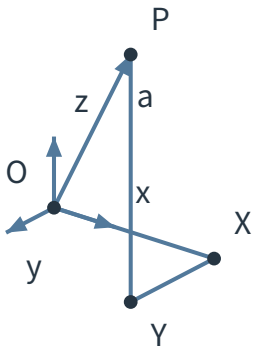

図 1　ベクトル a=(3,2,4)を 3 方向の移動として捉える

始点が違っても同じベクトルになりうる

ベクトルは、どこに置かれた矢印かではなく、どの方向へどれだけ進むかを表す。したがって、始点が異なっても 3 成分がすべて同じなら同じベクトルである。点の座標 (a_1, a_2, a_3) が位置を表すのに対し、ベクトルの成分 (a_1, a_2, a_3) は移動量を表す点に注意する。

例題 1：成分を読む

$\vec{a} = (3, -2, 4)$、$\vec{b} = (-1, 0, 5)$ について、各軸方向への移動を言葉で述べよ。

例題 1 の解答・解説

$\vec{a}$ は x 軸の正の向きに 3、y 軸の負の向きに 2、z 軸の正の向きに 4 だけ進む移動を表す。
$\vec{b}$ は x 軸の負の向きに 1、y 軸方向には動かず、z 軸の正の向きに 5 だけ進む移動を表す。成分が 0 なら、その方向への移動はない。

©ミライコーチング

2. ベクトルの演算は各成分で行う

移動をつなぐと成分は足し算になる

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ に続けて $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ だけ進むと、各軸方向の移動量はそれぞれ加わる。したがって

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$$

である。$-\vec{b}$ は $\vec{b}$ と同じ大きさで反対向きの移動だから、

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$$

となる。また、実数 k に対して

$$k\vec{a}=(ka_1,ka_2,ka_3)$$

である。$k>0$ なら向きは同じで大きさが k 倍、$k<0$ なら向きが反対になり大きさが $|k|$ 倍になる。

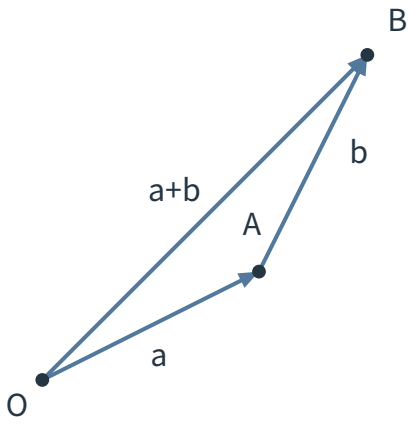

図 2　a の終点から b だけ進むと a+b になる

ベクトルの相等と零ベクトル

2 つのベクトルが等しいのは、対応する 3 成分がすべて等しいとき、またそのときに限る。

$$(a_1,a_2,a_3)=(b_1,b_2,b_3)\Leftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$$

$\vec{0}=(0,0,0)$ を零ベクトルという。零ベクトルは移動しないことを表し、$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ を満たす。

例題 2：ベクトルの演算と相等

$\vec{a}=(2,-1,3)$、$\vec{b}=(-4,5,1)$ とする。
(1) $\vec{a}+\vec{b}$ と $2\vec{a}-\vec{b}$ を求めよ。 (2) $(x+1,2y-1,z)=(3,5,-2)$ を満たす x,y,z を求めよ。

例題 2 の解答・解説

(1) 対応する成分ごとに計算して

$$\vec{a}+\vec{b}=(-2,4,4)$$

である。また $2\vec{a}=(4,-2,6)$ だから

$$2\vec{a}-\vec{b}=(4-(-4),-2-5,6-1)=(8,-7,5)$$

である。
(2) 対応する成分が等しいので、$x+1=3$、$2y-1=5$、$z=-2$ である。よって $(x,y,z)=(2,3,-2)$ である。

3. 大きさは 3 成分から復元する

大きさの公式は空間の距離公式と同じ

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ の大きさを $|\,\vec{a}\,|$ と書く。3 成分を直交する 3 方向への移動とみて三平方の定理を使うと、

$$|\,\vec{a}\,|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

となる。符号は方向に影響するが、2 乗されるため大きさは負にならない。$|\,\vec{a}\,|=0$ となるのは $\vec{a}=\vec{0}$ のときだけである。

単位ベクトル

大きさが 1 のベクトルを単位ベクトルという。$\vec{a}\neq\vec{0}$ なら、

$$\frac{1}{|\,\vec{a}\,|}\vec{a}$$

は $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルである。各成分を大きさで割ることで、向きを保ちながら大きさだけを 1 にできる。

例題 3：大きさと単位ベクトル

$\vec{a}=(2,-1,2)$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよ。また、$\vec{a}$ と反対向きで大きさ 6 のベクトルを求めよ。

例題 3 の解答・解説

$|\,\vec{a}\,|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$ である。したがって、同じ向きの単位ベクトルは

$$\frac{1}{3}\vec{a}=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

である。反対向きで大きさ 6 のベクトルは、この単位ベクトルを -6 倍して

$$-6\cdot\frac{1}{3}\vec{a}=(-4,2,-4)$$

となる。実際、その大きさは $\sqrt{16+4+16}=6$ である。

4. 2 点を結ぶベクトルは終点から始点を引く

点 A から点 B へ向かうベクトル

原点 O から点 A、B へ向かうベクトルをそれぞれ位置ベクトル $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ という。
$A(x_1, y_1, z_1)$、$B(x_2, y_2, z_2)$ のとき、

$$\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1), \qquad \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$$

である。A から B への移動は、原点から B への移動から原点から A への移動を引いたものなので、

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$$

となる。「終点の座標から始点の座標を引く」と覚えるとよい。逆向きなら $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ である。

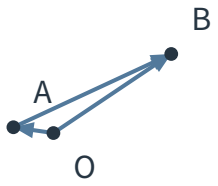

図 3　位置ベクトルの差としての AB

例題 4：2 点から定まるベクトル

$A(1, -2, 3)$、$B(5, 1, -1)$ とする。
(1) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BA}$ を求めよ。 (2) 点 C が $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ を満たすとき、C の座標を求めよ。

例題 4 の解答・解説

(1) 終点から始点を引くと

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 1, 1 - (-2), -1 - 3) = (4, 3, -4)$$

である。よって $\overrightarrow{BA} = (-4, -3, 4)$ である。
(2) $2\overrightarrow{AB} = (8, 6, -8)$ である。A からこの成分だけ進むので、

$$C = (1 + 8, -2 + 6, 3 - 8) = (9, 4, -5)$$

である。確認すると $\overrightarrow{AC} = (9 - 1, 4 - (-2), -5 - 3) = (8, 6, -8)$ となる。

©ミライコーチング

5. 演習

演習 1：成分と相等

$\vec{a}=(p-1,2q,3)$、$\vec{b}=(4,6,r+5)$ が等しいとき、p,q,r を求めよ。

演習 2：成分計算

$\vec{a}=(1,-3,2)$、$\vec{b}=(4,1,-2)$ のとき、$3\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ を求めよ。

演習 3：ベクトル方程式

$\vec{a}=(2,-1,3)$、$\vec{b}=(-1,4,2)$ とする。$x\vec{a}+y\vec{b}=(3,-5,1)$ を満たす実数 x,y を求めよ。

演習 4：大きさと単位ベクトル

$\vec{a}=(-2,3,6)$ の大きさと、$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよ。

演習 5：2 点を結ぶベクトル

$A(-2,1,4)$、$B(3,-3,2)$ のとき、$\overrightarrow{AB}$ とその大きさを求めよ。

演習 6：未知の点の座標

$A(1,2,-1)$、$B(5,-2,3)$ とする。点 P が $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ を満たすとき、P の座標を求めよ。

6. 演習の解答・解説

演習 1 の解答・解説

対応する成分が等しいので、$p-1=4$、$2q=6$、$3=r+5$ である。したがって $(p,q,r)=(5,3,-2)$ である。

演習 2 の解答・解説

$3\vec{a}=(3,-9,6)$、$2\vec{b}=(8,2,-4)$ だから、

$$3\vec{a}+2\vec{b}=(11,-7,2)$$

である。また

$$\vec{a}-2\vec{b}=(1-8,-3-2,2-(-4))=(-7,-5,6)$$

である。

演習 3 の解答・解説

成分を比較すると

$$2x - y = 3, \qquad -x + 4y = -5, \qquad 3x + 2y = 1$$

を得る。第 1 式から $y = 2x - 3$ として第 2 式へ代入すると、$-x + 8x - 12 = -5$ より $x = 1$、$y = -1$ となる。第 3 式でも $3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1$ となり、3 成分すべてを満たす。よって $(x, y) = (1, -1)$ である。

演習 4 の解答・解説

$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$$

である。したがって、同じ向きの単位ベクトルは

$$\frac{1}{7}\vec{a} = \left(-\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$$

である。

演習 5 の解答・解説

$$\overrightarrow{AB} = (3 - (-2), -3 - 1, 2 - 4) = (5, -4, -2)$$

である。その大きさは

$$|\,\overrightarrow{AB}\,| = \sqrt{5^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

である。

演習 6 の解答・解説

$\overrightarrow{AB} = (4, -4, 4)$ だから、$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = (3, -3, 3)$ である。A からこの成分だけ進むので

$$P = (1 + 3, 2 - 3, -1 + 3) = (4, -1, 2)$$

である。実際、$\overrightarrow{AP} = (3, -3, 3)$ となる。