第 243 講 媒介変数表示

学習目標

- 媒介変数の値から、曲線上の点の座標を求められる。
- 媒介変数を消去し、曲線の方程式と実際に動く範囲を求められる。
- 媒介変数の範囲から始点・終点・進む向き・同じ点を通る回数を判断できる。

1. 1 つの数で平面上の点を動かす

媒介変数表示

変数 t の値に応じて点 P の座標を

$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

と表すとき、これを曲線の媒介変数表示といい、t を媒介変数という。t を 1 つ決めると x と y が同時に決まり、平面上の点 $P(f(t), g(t))$ が定まる。

方程式ではなく点の動きとして読む

たとえば $x = 1 + t, y = 2t$ では、$t = 0$ のとき $P(1, 0)$、$t = 1$ のとき $P(2, 2)$ である。t を連続的に変えると点も連続的に動き、その通り道が曲線になる。
媒介変数表示がもつ情報は点の集合だけではない。t の範囲は通る部分を、t の増加は進む向きを、異なる t が同じ座標を与えるかどうかは通過回数を決める。したがって、式だけでなく「t がどこからどこまで増えるか」を同時に読む必要がある。

例題 1：直線上を動く点

点 P の座標が $x = 1 + t, y = 2t$ で表され、$-2 \leq t \leq 1$ とする。
1. $t = -2, 0, 1$ のときの点 P の座標を求めよ。
2. t を消去して x, y の関係式を求めよ。
3. 点 P が動く範囲と向きを答えよ。

例題 1 の解答・解説

1. それぞれ代入すると、$t = -2$ では $(-1, -4)$、$t = 0$ では $(1, 0)$、$t = 1$ では $(2, 2)$ である。
2. $x = 1 + t$ より $t = x - 1$ である。これを $y = 2t$ へ代入すると $y = 2x - 2$ を得る。
3. $-2 \leq t \leq 1$ であるから、直線 $y = 2x - 2$ 全体ではなく、端点 $(-1, -4)$ と $(2, 2)$ を結ぶ線分を動く。t が増えると $x = 1 + t$ も増えるので、$(-1, -4)$ から $(2, 2)$ へ進む。

©ミライコーチング

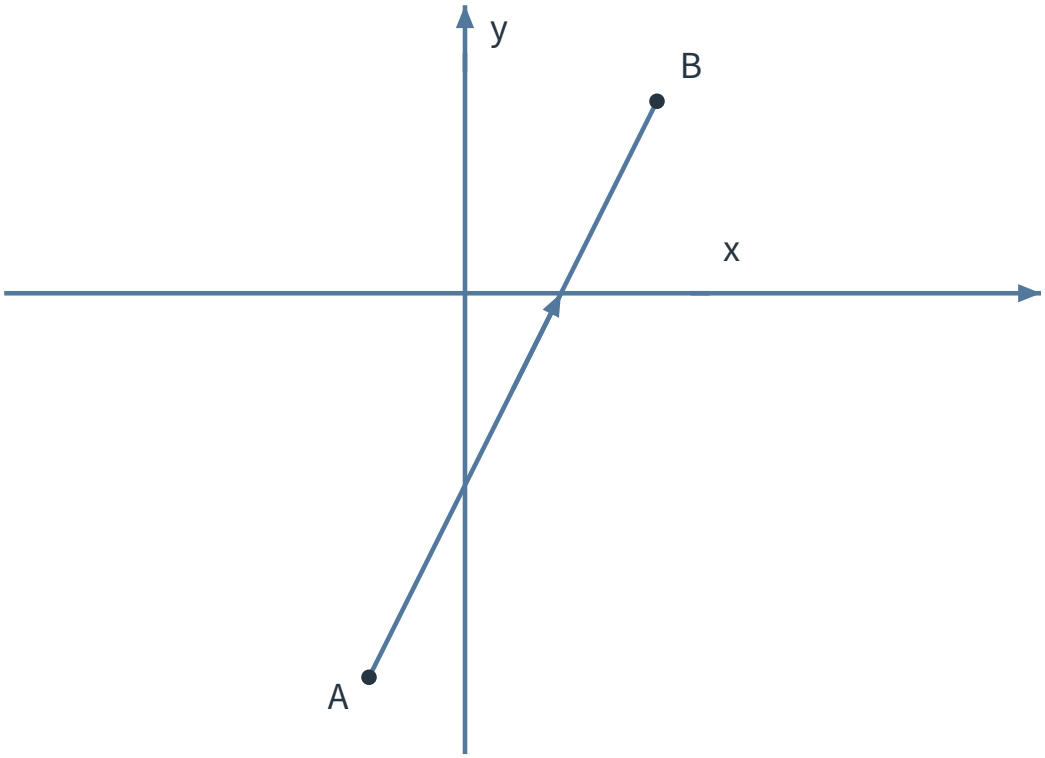

図 1　t の増加とともに $(-1,-4)$ から $(2,2)$ へ進む線分

読む順序

1. 代表的な t を代入して点を求める。
2. 可能なら t を消去して、曲線の方程式を求める。
3. t の範囲を座標の範囲へ移し、曲線のどの部分かを決める。
4. t が増えるときの座標の変化から向きを決める。

2. 消去した方程式だけでは範囲が消える

例題 2：放物線の一部分

$x=t, y=t^2$、$-1 \leq t \leq 2$ で表される曲線について、t を消去した方程式、曲線の範囲、進む向きを求めよ。

例題 2 の解答・解説

$x=t$ であるから、t を消去すると $y=x^2$ である。また $-1 \leq t \leq 2$ は、そのまま $-1 \leq x \leq 2$ を与える。したがって曲線は放物線 $y=x^2$ のうち $-1 \leq x \leq 2$ の部分である。
t が -1 から 2 へ増えると x も増えるので、点は $(-1,1)$ から頂点 $(0,0)$ を通り、$(2,4)$ へ進む。方程式 $y=x^2$ だけでは放物線全体を表すため、範囲と向きは復元できない。

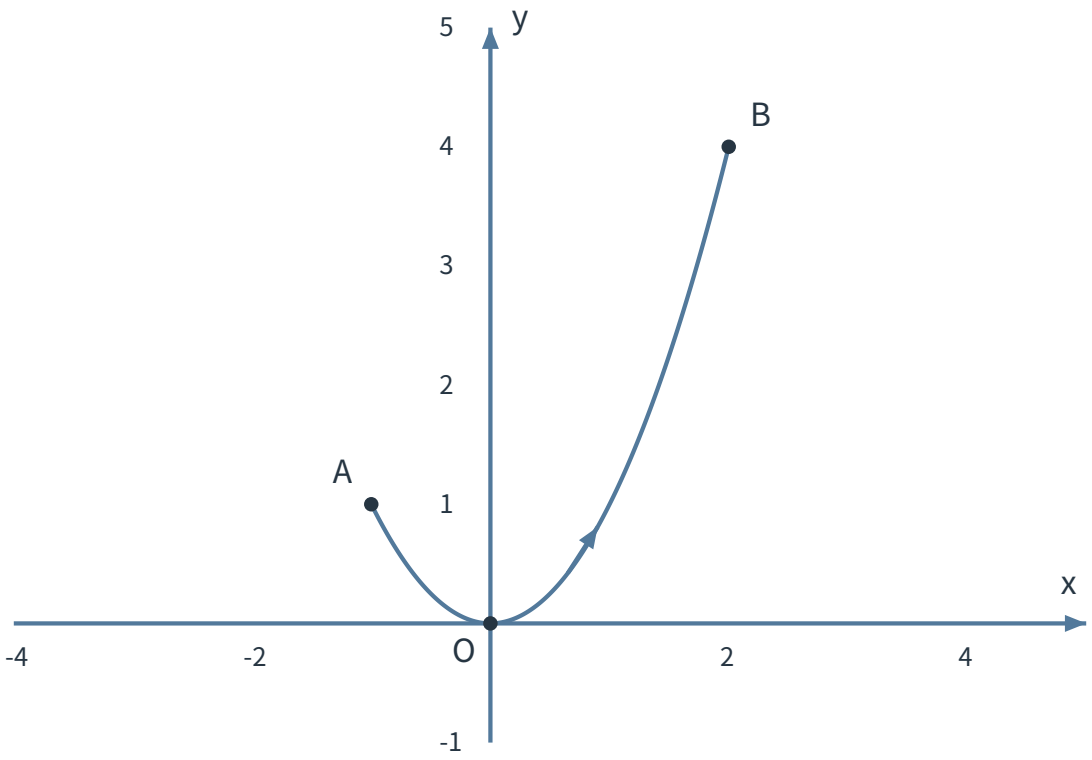

図 2　$(-1, 1)$ から頂点を通り $(2, 4)$ へ進む放物線の一部

消去後には必ず範囲を添える

t を消去して得た方程式は、実際の通り道より広い点集合を表すことがある。媒介変数表示から曲線を求めるときは、関係式だけで終えず、端点を含むかどうかも含めて座標の範囲を確認する。

3. 円では三角関数が点の位置を決める

単位円上の点を拡大する

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ より、$x = 2\cos t, y = 2\sin t$ なら常に $x^2 + y^2 = 4$ である。$0 \leq t \leq 2\pi$ では、$t = 0$ の点 $(2, 0)$ から始まり、$t = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ で順に $(0, 2), (-2, 0), (0, -2)$ を通る。したがって半径 2 の円を反時計回りに 1 周する。
同じ $x^2 + y^2 = 4$ を得ても、$0 \leq t \leq \pi$ なら上半円だけである。消去後の方程式は同じでも、t の範囲が異なれば通る部分は変わる。

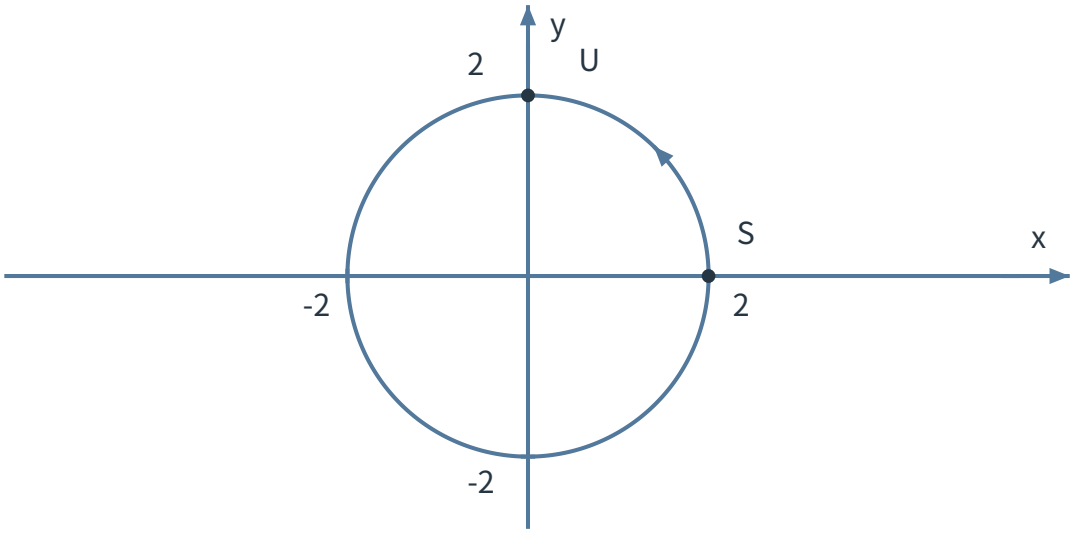

図 3　$x = 2\cos t,\ y = 2\sin t$ が円を反時計回りに 1 周する

例題 3：同じ円でも範囲が違う

$x = 3\cos t, y = 3\sin t$、$0 \leq t \leq \pi$ で表される曲線について、t を消去した方程式、始点、終点、通る範囲、進む向きを求めよ。

例題 3 の解答・解説

$x^2 + y^2 = 9(\cos^2 t + \sin^2 t) = 9$ である。$0 \leq t \leq \pi$ では $\sin t \geq 0$ だから $y \geq 0$ である。始点は $t = 0$ の $(3, 0)$、終点は $t = \pi$ の $(-3, 0)$ である。$t = \frac{\pi}{2}$ で $(0, 3)$ を通るので、半径 3 の円の上半分を $(3, 0)$ から $(-3, 0)$ へ反時計回りに進む。

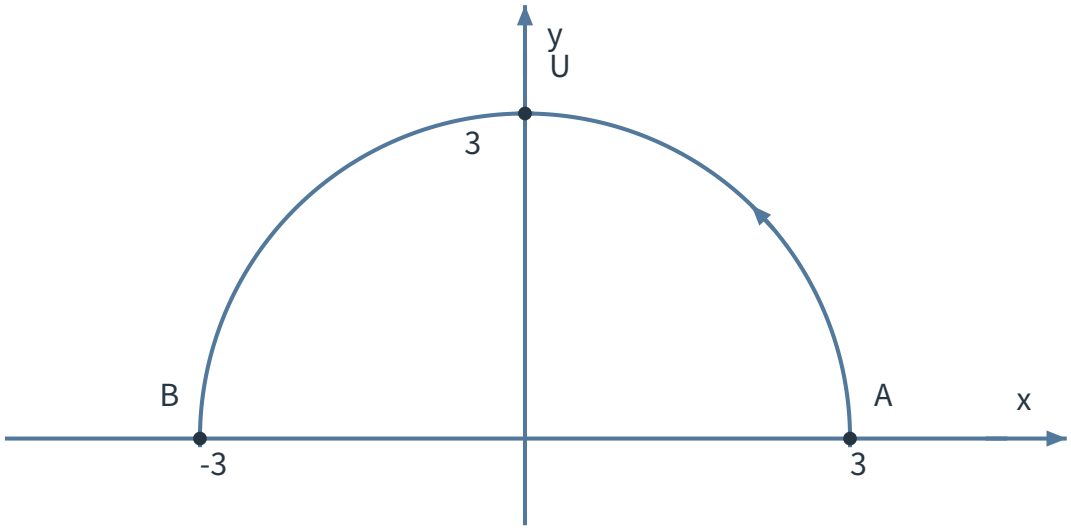

図 4　$(3,0)$ から $(-3,0)$ へ進む上半円

4. 同じ点を何度通るか

点の集合と通過回数は別の情報である

$x=\cos t, y=\sin t$ で $0\le t\le 4\pi$ とすると、消去後は $x^2+y^2=1$ であり、通る点の集合は単位円である。しかし $0\le t\le 2\pi$ で 1 周し、$2\pi\le t\le 4\pi$ でもう 1 周するため、曲線を 2 周する。
また $x=t^2, y=t^2$、$-1\le t\le 1$ では $y=x$、$0\le x\le 1$ である。t が -1 から 0 へ増える間は $(1,1)$ から $(0,0)$ へ進み、その後は $(1,1)$ へ戻る。t と $-t$ が同じ座標を与えることが、往復の原因である。

消去して失われる 3 つの情報

t を消去した x, y の方程式だけでは、一般に次の情報は残らない。
- 曲線のどの部分を通るか
- どちら向きに進むか
- 同じ部分を何回通るか

元の式と t の範囲を合わせて調べる必要がある。

5. 演習

演習 1：座標と消去

$x=2t-1, y=t+3$、$0\le t\le 2$ について、$t=0,1,2$ のときの点の座標を求め、t を消去した関係式と曲線の範囲を答えよ。

演習 2：放物線の向き

$x=t, y=t^2-1$、$-2\le t\le 1$ について、曲線の方程式、始点、終点、通る範囲、進む向きを求めよ。

演習 3：文字を消去する

$x = t + 1, y = t^2$、$-1 \leq t \leq 2$ について、t を消去した方程式と x の範囲を求めよ。また、始点と終点を答えよ。

演習 4：円弧の判定

$x = 4\cos t, y = 4\sin t$、$\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ について、曲線の方程式、通る範囲、始点、終点、進む向きを求めよ。

演習 5：楕円を 1 周する表示

$x = 3\cos t, y = 2\sin t$、$0 \leq t \leq 2\pi$ について、t を消去した方程式を求めよ。また、始点と進む向きを答えよ。

演習 6：往復する線分

$x = t^2, y = 2t^2$、$-2 \leq t \leq 2$ について、t を消去した関係式と曲線の範囲を求めよ。さらに、点がどのように動くかを始点、折り返す点、終点の順に説明せよ。

6. 演習の解答・解説

演習 1 の解答・解説

$t = 0, 1, 2$ のとき、点は順に $(-1, 3), (1, 4), (3, 5)$ である。$x = 2t - 1$ より $t = \frac{x+1}{2}$ であるから、

$$y = \frac{x+1}{2} + 3 = \frac{x+7}{2}$$

を得る。$0 \leq t \leq 2$ より $-1 \leq x \leq 3$ である。したがって、直線 $y = \frac{x+7}{2}$ のうち $(-1, 3)$ と $(3, 5)$ を結ぶ線分である。

演習 2 の解答・解説

$x = t$ より、曲線の方程式は $y = x^2 - 1$ で、範囲は $-2 \leq x \leq 1$ である。始点は $t = -2$ の $(-2, 3)$、終点は $t = 1$ の $(1, 0)$ である。t とともに x が増えるので、$(-2, 3)$ から頂点 $(0, -1)$ を通って $(1, 0)$ へ進む。

演習 3 の解答・解説

$x = t + 1$ より $t = x - 1$ である。したがって、$y = (x - 1)^2$ である。$-1 \leq t \leq 2$ より $0 \leq x \leq 3$ である。始点は $t = -1$ の $(0, 1)$、終点は $t = 2$ の $(3, 4)$ である。

演習 4 の解答・解説

$x^2 + y^2 = 16$ である。$\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ では $\cos t \leq 0$ だから $x \leq 0$ であり、左半円を通る。始点は $(0, 4)$、終点は $(0, -4)$ である。途中で $t = \pi$ の点 $(-4, 0)$ を通るので、$(0, 4)$ から左側を回って $(0, -4)$ へ反時計回りに進む。

演習 5 の解答・解説

$\frac{x}{3} = \cos t$、$\frac{y}{2} = \sin t$ であるから、

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

を得る。始点は $t = 0$ の $(3, 0)$ である。$t = \frac{\pi}{2}$ で $(0, 2)$ を通るので、楕円を反時計回りに 1 周する。

演習 6 の解答・解説

$y = 2x$ であり、$x = t^2$ と $-2 \leq t \leq 2$ より $0 \leq x \leq 4$ である。したがって、通る範囲は直線 $y = 2x$ 上の $(0, 0)$ と $(4, 8)$ を結ぶ線分である。
始点は $t = -2$ の $(4, 8)$ である。t が -2 から 0 へ増えると t^2 は 4 から 0 へ減るため、点は $(0, 0)$ まで進む。$t = 0$ で折り返し、その後は t^2 が増えるため、終点 $(4, 8)$ へ戻る。t と $-t$ が同じ点を与えるので、内点（$0 < x < 4$）は往路と復路で 2 回通る。また、$(0, 0)$ は $t = 0$ の 1 回、$(4, 8)$ は $t = -2, 2$ の 2 回現れる。