第 247 講 直交座標・媒介変数・極座標を使い分ける

学習目標

- 求めたい情報から、直交座標・媒介変数・極座標のどれが適するかを理由付きで選べる。
- 同じ曲線を三つの表現で表し、式だけでなく変数の範囲と端点まで対応させられる。
- 極座標では $r \geq 0$ と極の多重表示を保ち、変換前後の点集合が同じかを確かめられる。
- 「同じ点集合」と「同じ順序・向き・回数でたどる」を区別し、媒介変数や偏角の範囲から通過回数を判断できる。

1. 式の形ではなく、見たい情報で選ぶ

三つの表現は見せる情報が異なる

同じ曲線でも、表し方によって見えやすい情報が異なる。最も短い式が常に最良なのではない。問いに必要な情報が表面に出る表現を選ぶことが大切である。

表現	直接見やすい情報	適する問い
直交座標	点が満たす (x, y) の関係	点の所属判定、直交座標の式どうしの連立
媒介変数表示	点の動く順序・向き・通過回数	始点と終点、どちら向きに何回たどるか
極座標	極からの距離と方向	特定の半直線との交点、極を中心とする対称性

たとえば円は直交座標なら $x^2 + y^2 = 9$、媒介変数表示なら $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t$、極座標なら $r = 3$ と書ける。どれも円を表せるが、答えたい問いによって便利な式は変わる。

表現には範囲も含まれる

曲線の表現は式だけでは完成しない。媒介変数や偏角・動径の範囲、端点を含むかどうかも表現の一部である。
また、同じ点集合を表すことと、同じ順序・向き・回数で点をたどることは別である。直交座標の関係式は主に点集合を示す。媒介変数表示や範囲付きの極座標は、点集合に加えてたどり方も示せる。

まず問いを言葉で分類する

- (x, y) の関係を知りたいなら、直交座標を候補にする。
- 点の動きを知りたいなら、媒介変数表示を候補にする。
- 極からの距離や方向を知りたいなら、極座標を候補にする。

必要なら、選んだ表現へ他の式を移して照合する。

©ミライコーチング

2. 範囲まで含めて同じ線分を表す

例題 1：同じ線分の三つの表現

原点 $O(0,0)$ と点 $A(2,2)$ を結ぶ線分を、直交座標、媒介変数表示、極座標の三通りで表せ。ただし、極座標では $r \geq 0$ とする。また、三つの表現が同じ点集合を表すことを、両方向に確かめよ。

例題 1 の解答・解説

三つの表現は次の通りである。

$$\begin{aligned} &\text{直交座標} && y = x, \quad 0 \leq x \leq 2, \\ &\text{媒介変数表示} && x = 2t, \quad y = 2t, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ &\text{極座標} && \theta = \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

直交座標の表現を満たす点は (s, s)（$0 \leq s \leq 2$）と書ける。この点は、媒介変数表示では $t = \frac{s}{2}$、極座標では $r = s\sqrt{2}$ とすれば得られる。
逆に、媒介変数表示の点は $(2t, 2t)$ であり、$0 \leq 2t \leq 2$ だから直交座標の線分上にある。極座標の点は

$$(x, y) = \left(r\cos\frac{\pi}{4}, r\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$$

である。$0 \leq r \leq 2\sqrt{2}$ より $0 \leq \frac{r}{\sqrt{2}} \leq 2$ なので、これも同じ線分上にある。したがって、三つの点集合は一致する。
$y = x$ だけでは直線全体、$\theta = \frac{\pi}{4}$ だけでは半直線になる。範囲が線分を定めているのである。極 O は偏角が一意ではないが、$r = 0,\ \theta = \frac{\pi}{4}$ という表示が存在するため含まれる。

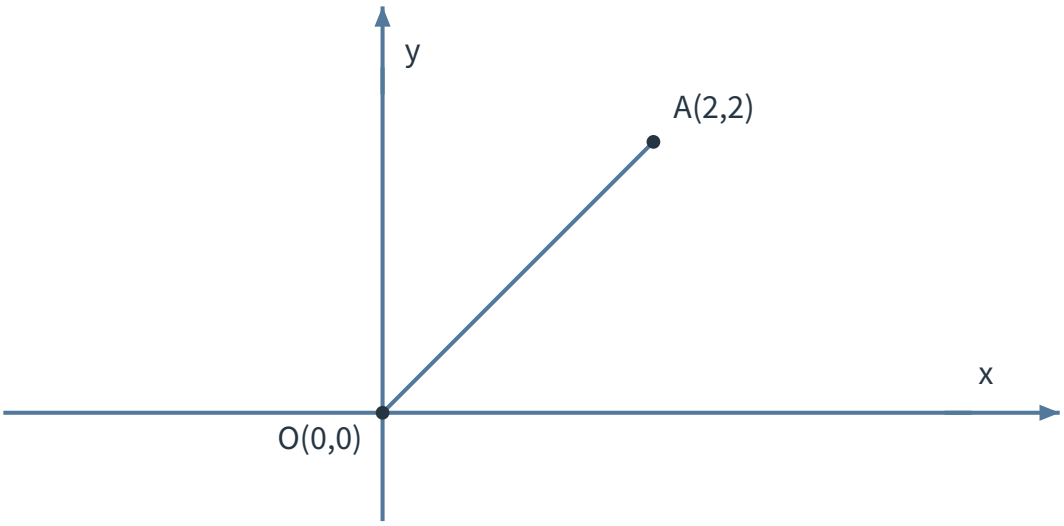

図 1　三つの表現はいずれも線分 OA を表す

3. 同じ円でも、問いによって便利な表現が変わる

例題 2：問いに合う円の表現

中心が O、半径が 3 の円について、次の問いに答えよ。
(1) 直交座標、媒介変数表示、極座標でそれぞれ表せ。媒介変数と偏角の範囲は、端点を重複させずに 1 周を表すものとする。
(2) 点 (a, b) が円上にあるかを式で確かめるには、どの表現が便利か。
(3) 点 $(3, 0)$ から反時計回りに 1 周する動きを表すには、どの表現が便利か。
(4) 方向 $\theta = \alpha$ 上の円周上の点を求めるには、どの表現が便利か。

例題 2 の解答・解説

(1) 三つの表現は

$$x^2 + y^2 = 9,$$

$$x = 3\cos t, \quad y = 3\sin t, \quad 0 \le t < 2\pi,$$

$$r = 3, \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

である。いずれも極からの距離が 3 である点全体を表す。
(2) 直交座標が便利である。(a, b) を $x^2 + y^2 = 9$ へ代入し、$a^2 + b^2 = 9$ かを確かめればよい。
(3) 媒介変数表示が便利である。$t = 0$ で $(3, 0)$ から始まり、t が増えると反時計回りに進むことが、$\cos t, \sin t$ の変化から読める。
(4) 極座標が便利である。$r = 3$ と $\theta = \alpha$ を同時に満たす点なので、直交座標は $(3\cos\alpha, 3\sin\alpha)$ である。

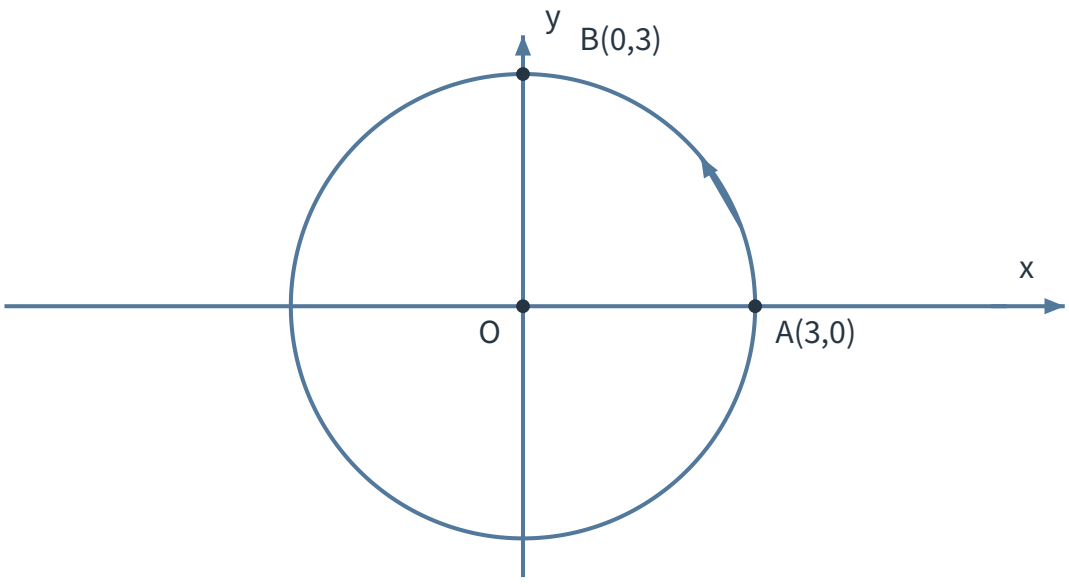

図 2　半径 3 の円では、所属・動き・方向に応じて表現を選ぶ

閉区間でも点集合は同じだが、端点が重なる

$0 \le t \le 2\pi$ とすると、$t=0$ と $t=2\pi$ がともに $(3,0)$ を与える。$0 \le \theta \le 2\pi$ でも同様である。点集合は半開区間の場合と同じだが、始点と終点を同じ点として重複させる。
$0 \le t < 2\pi$、$0 \le \theta < 2\pi$ とするのは、1 周分の各点をちょうど 1 回ずつ表すためである。

4. 極を通る曲線では、極を別に確認する

例題 3：円と半直線の交点

円 $(x-1)^2+y^2=1$ について、次の問いに答えよ。ただし $r \ge 0$ とする。
(1) 媒介変数表示 $x=1+\cos t,\ y=\sin t,\ 0 \le t < 2\pi$ と、極座標 $r=2\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta < \frac{\pi}{2}$ が、どちらもこの円を過不足なく 1 回表すことを確かめよ。
(2) この円と半直線 $\theta=\frac{\pi}{3}$ の交点をすべて求めよ。

例題 3 の解答・解説

(1) 媒介変数表示を直交座標の式へ代入すると、

$$(x-1)^2+y^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$$

となる。$0 \le t < 2\pi$ では円周を $(2,0)$ から反時計回りに 1 回たどり、終点の重複はない。
直交座標の式へ $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ を代入すると、

$$r^2-2r\cos\theta=0$$

となる。極以外では $r>0$ なので $r=2\cos\theta$ である。$-\frac{\pi}{2} \le \theta < \frac{\pi}{2}$ では $\cos\theta \ge 0$ であり、$r \ge 0$ を保つ。$\theta=-\frac{\pi}{2}$ で極を含み、$\theta=\frac{\pi}{2}$ を除いて同じ極の重複を避ける。この範囲を増加させると、極から下側の円弧を通って $(2,0)$ へ進み、上側の円弧を通って極へ戻るので、円周を反時計回りに 1 回表す。
逆に、円周上の非極の点では $x^2+y^2=2x$ より、$r^2=2r\cos\theta$、したがって $r=2\cos\theta$ となる。その点の方向は $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ に選べる。極も $\theta=-\frac{\pi}{2}$ で表せるため、点集合は一致する。
(2) 非極の交点は、$\theta=\frac{\pi}{3}$ を $r=2\cos\theta$ へ代入して

$$r=2\cos\frac{\pi}{3}=1$$

となる。よって、その直交座標は

$$\left(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

である。さらに極 O も円と半直線の両方に属する。したがって、交点は O と $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ の 2 点である。

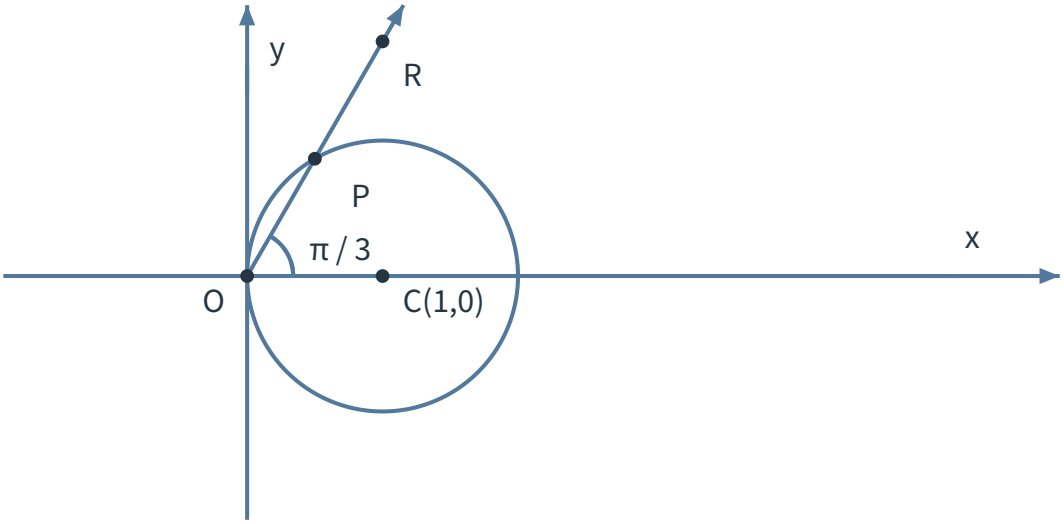

図 3　円と半直線 $\theta = \frac{\pi}{3}$ の交点は極 O と非極の点 P である

同じ (r, θ) を探すだけでは極を落とす

円の極方程式は、図の極を $r = 0,\ \theta = -\frac{\pi}{2}$ で表す。一方、半直線は同じ極を $r = 0,\ \theta = \frac{\pi}{3}$ で表せる。同じ点でも偏角が異なるので、二つの式に共通する数の組 (r, θ) だけを探すと極を落とす。交点では、まず $r > 0$ の点を通常通り計算し、最後に極がそれぞれの点集合に属するかを別に確認する。

5. 同じ点集合と、同じたどり方は別である

例題 4：同じ線分を異なる回数たどる

次の二つの媒介変数表示を比較せよ。

$$\text{I} \quad x = t, \quad y = t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\text{II} \quad x = t^2, \quad y = t^2, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

(1) それぞれの点集合を求めよ。
(2) 始点・終点・向き・各点を通る回数を比較せよ。

例題 4 の解答・解説

(1) I では $(x, y) = (t, t)$、$0 \leq t \leq 1$ なので、点集合は $y = x,\ 0 \leq x \leq 1$ である。II でも $x = y = t^2$ かつ $0 \leq t^2 \leq 1$ である。逆に、線分上の点 (s, s)（$0 \leq s \leq 1$）は $t = \sqrt{s}$ とすれば II で得られる。したがって、二つの点集合は同じ線分 OB である。ただし $B = (1, 1)$ とする。
(2) I は $t = 0$ で O から始まり、$t = 1$ で B に着く。t の増加とともに 1 回だけ O から B へ進む。
II は $t = -1$ で B から始まり、$-1 \leq t \leq 0$ では t^2 が 1 から 0 へ減るので B から O へ進む。$0 \leq t \leq 1$ では O から B へ戻る。$0 < x \leq 1$ の各点 (x, x) には

$$t = \pm\sqrt{x}$$

の 2 個が対応するため、B を含めて 2 回通る。極 O には $t = 0$ だけが対応するため、O を通るのは 1 回である。
媒介変数を消去すると、どちらも $y = x,\ 0 \leq x \leq 1$ しか残らない。そこから始点・終点・向き・通過回数を復元することはできない。

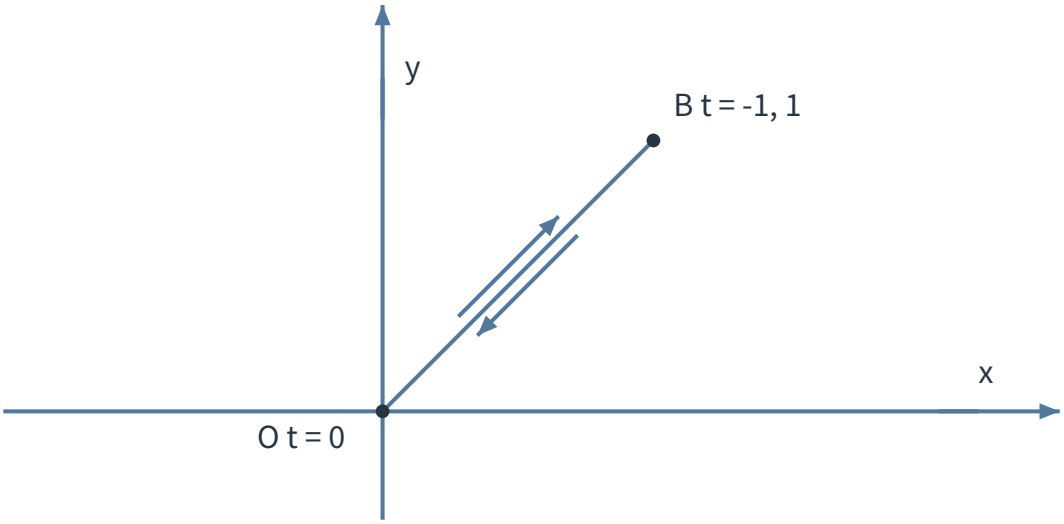

図 4　II は B から O へ進み、折り返して B へ戻る

極座標でも範囲が周回数を決める

$r = 3,\ 0 \leq \theta < 2\pi$ と $r = 3,\ 0 \leq \theta < 4\pi$ は、どちらも同じ半径 3 の円を点集合として表す。
前者では各点に対応する偏角が範囲内に 1 個ずつあり、円を反時計回りに 1 回たどる。後者では各点に 2π だけ異なる 2 個の偏角が対応し、同じ向きに 2 回たどる。式 $r = 3$ だけを見ても、この違いは分からない。

©ミライコーチング

6. 選択・変換・確認の手順

五つの手順

1. 問いが求める情報を、点の関係、点の動き、極からの距離・方向のどれかに分ける。
2. その情報が直接見える表現を選び、変数の範囲を式と同時に書く。
3. 必要な曲線だけを共通の表現へ移し、変換で掛けた量・割った量が 0 の場合を残す。
4. 点集合の一致は両方向で確かめ、極座標では $r \geq 0$、偏角の周期、極を別に確認する。
5. 動きが問われるときは、始点・終点・向きと、同一点を与えるパラメータの個数まで確認する。

7. 演習

演習 1：目的に合う表現

次の各問いでは、直交座標、媒介変数表示、極座標のどれを最初に選ぶとよいか。理由も述べよ。

(1) 点 (a, b) が曲線 $y = x^2$ 上にあるかを判定する。

(2) 曲線上を動く点の始点・終点と進む向きを調べる。

(3) 極から距離 5、方向 $\theta = \frac{\pi}{6}$ にある点を求める。

演習 2：x 軸上の線分

原点 O から点 $A(3, 0)$ までの線分を、直交座標、媒介変数表示、極座標の三通りで表せ。ただし $r \geq 0$ とし、範囲と端点も照合せよ。

演習 3：半径 2 の円の点集合とたどり方

半径 2、中心が原点の円を表す次の三つの式を考える。

$$x^2 + y^2 = 4, \qquad x = 2\cos t,\ y = 2\sin t, \qquad r = 2.$$

(1) 媒介変数 t と偏角 θ に、端点を重複させない 1 周分の範囲を付けよ。直交座標の式には、たどる順序を与える変数がないことも述べよ。

(2) 三つの点集合を比較し、媒介変数表示と極座標について始点・向き・通過回数を述べよ。

演習 4：極を通る円と半直線

円 $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ について、次の問いに答えよ。ただし $r \geq 0$ とする。

(1) 極方程式 $r = 4\sin\theta$ へ直し、$0 \leq \theta < \pi$ が円周の 1 周分を表すことを確かめよ。

(2) この円と半直線 $\theta = \frac{\pi}{6}$ の交点をすべて求めよ。

©ミライコーチング

演習 5：同じ円を 1 周と 2 周

次の二つの媒介変数表示について、点集合、進む向き、各点を通る回数を比較せよ。

$$\text{I}\quad x=2\cos t,\quad y=2\sin t,\quad 0\le t<2\pi,$$

$$\text{II}\quad x=2\cos(2t),\quad y=2\sin(2t),\quad 0\le t<2\pi.$$

演習 6：三つの誤りを訂正する

次の説明の誤りをそれぞれ訂正せよ。
(1) $x=1+\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le\pi$ から t を消去すると $(x-1)^2+y^2=1$ だから、点は円周全体を動く。
(2) $O(0,0)$ と $A(2,2)$ を結ぶ線分は $\theta=\frac{\pi}{4}$ 上にあり、x の上端が 2 だから、極座標では $\theta=\frac{\pi}{4},\ 0\le r\le 2$ である。
(3) 円 $x^2+(y-2)^2=4$ と半直線 $\theta=\frac{\pi}{6}$ の交点は、$r=4\sin\frac{\pi}{6}=2$ から得られる $\left(\sqrt{3},1\right)$ だけである。

8. 演習の解答・解説

演習 1 の解答・解説

(1) 直交座標が適する。(a,b) を $y=x^2$ へ代入し、$b=a^2$ かを直接確かめられるからである。
(2) 媒介変数表示が適する。パラメータの範囲と増加に沿って、始点・終点・順序・向きを読めるからである。
(3) 極座標が適する。距離と方向がそのまま $r=5,\ \theta=\frac{\pi}{6}$ と表れ、点は $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2},\frac{5}{2}\right)$ と求められるからである。

演習 2 の解答・解説

三つの表現は

$$\begin{aligned}&\text{直交座標}\quad && y=0,\quad 0\le x\le 3,\\ &\text{媒介変数表示}\quad && x=3t,\quad y=0,\quad 0\le t\le 1,\\ &\text{極座標}\quad && \theta=0,\quad 0\le r\le 3\end{aligned}$$

である。$t=0$ と $r=0$ が O に、$t=1$ と $r=3$ が A に対応する。途中の点 $(s,0)$（$0\le s\le 3$）には $t=\frac{s}{3}$、$r=s$ が対応するので、三つの点集合は一致する。極 O は偏角が一意ではないが、$r=0,\ \theta=0$ という表示をもつため含まれる。

演習 3 の解答・解説

(1) 範囲を付けると、

$$x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad 0 \le t < 2\pi$$

および

$$r = 2, \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

となる。直交座標の式 $x^2 + y^2 = 4$ には媒介変数がなく、点の順序や周回数は指定されていない。
(2) 三つとも原点からの距離が 2 である点全体なので、点集合は同じ円周である。媒介変数表示は $t = 0$ で、極座標は $\theta = 0$ で、ともに $(2, 0)$ から始まる。変数が増えると反時計回りに進み、半開区間であるから各点を 1 回ずつ通る。

演習 4 の解答・解説

(1) 直交座標の式を展開すると $x^2 + y^2 = 4y$ である。$x^2 + y^2 = r^2$、$y = r\sin\theta$ より

$$r^2 = 4r\sin\theta$$

となる。もとの円は極を通る。極以外では $r > 0$ なので、r で割って $r = 4\sin\theta$ を得る。極も $\theta = 0$ のとき $r = 0$ として含まれる。
$0 \le \theta < \pi$ では $\sin\theta \ge 0$ なので $r \ge 0$ である。また、

$$x = 4\sin\theta\cos\theta = 2\sin 2\theta, \qquad y = 4\sin^2\theta = 2 - 2\cos 2\theta$$

である。θ が 0 から π まで増えると 2θ は 0 から 2π まで増え、円周を極から反時計回りに 1 回たどる。$\theta = 0$ で極を含み、$\theta = \pi$ を除くことで極の重複を避ける。
(2) 非極の交点では

$$r = 4\sin\frac{\pi}{6} = 2$$

であるから、

$$(x, y) = \left(2\cos\frac{\pi}{6}, 2\sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\sqrt{3}, 1\right)$$

となる。さらに極 O も円と半直線の両方に属する。したがって、交点は O と $\left(\sqrt{3}, 1\right)$ の 2 点である。

演習 5 の解答・解説

I でも II でも、

$$x^2 + y^2 = 4$$

となる。逆に、この円周上の各点は適切な角を選べばどちらの表示でも得られるため、点集合は同じ半径 2 の円周である。
I では角 t が 0 から 2π まで増えるので、$(2, 0)$ から反時計回りに 1 周し、各点を 1 回ずつ通る。
II では角 $2t$ が 0 から 4π まで増えるので、$(2, 0)$ から反時計回りに 2 周する。円周上の偏角を α $(0 \le \alpha < 2\pi)$ とすると、$2t = \alpha$ と $2t = \alpha + 2\pi$ に対応する 2 個の t が $0 \le t < 2\pi$ にある。したがって、各点を 2 回ずつ通る。

演習 6 の解答・解説

(1) $0 \le t \le \pi$ では $y = \sin t \ge 0$ である。したがって、点集合は円周全体ではなく、$(2, 0)$ から上側を通って O へ至る上半円である。パラメータを消去した式に、範囲から得られる条件 $y \ge 0$ を添える必要がある。
(2) 動径は極からの距離である。点 $A(2, 2)$ までの距離は

$$OA = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

である。したがって、正しくは $\theta = \frac{\pi}{4},\ 0 \le r \le 2\sqrt{2}$ である。
(3) 代入で得た $\left(\sqrt{3}, 1\right)$ は非極の交点だけである。極 O も円上にあり、半直線の端点でもある。したがって、交点は O と $\left(\sqrt{3}, 1\right)$ の 2 点である。