

第 54 講 空間における直線と平面

学習目標

- ・空間内の 2 直線を、交わる・平行・ねじれの位置に分類できる。
- ・直線と平面の基本的な位置関係を判断できる。
- ・2 平面の平行・交わる関係や垂直関係を判断できる。
- ・直線と平面の垂直、直線と平面の平行を判断する基本条件を説明できる。
- ・立方体の辺や面を使って、空間内の位置関係を正しく読み取れる。

この講で使う立方体

頂点・辺・面の名前を固定する

この講では、立方体 $ABCD - EFGH$ を使って空間内の位置関係を考えます。
下面を $ABCD$ 、上面を $EFGH$ とし、 E, F, G, H はそれぞれ A, B, C, D の真上にあるものとします。
したがって、縦の辺は、

- ・ AE
- ・ BF
- ・ CG
- ・ DH

です。

6 つの面は次のように表します。

面の位置	面の名前
下面	($ABCD$)
上面	($EFGH$)
前面	($ABFE$)
右面	($BCGF$)
奥面	($CDHG$)
左面	($DAEH$)

たとえば、辺 AB と辺 BC は下面 ($ABCD$) 上にあり、点 B で交わります。
一方、辺 AB と辺 CG は交わらず、平行でもありません。

空間では同じ平面上にあるかを確認する

平面上の図形では、交わらない 2 直線は平行でした。
しかし、空間では 2 直線が同じ平面上にあるとは限りません。
空間の問題では、
2 直線が同一平面上にあるか
を確認することが重要です。

空間内の 2 直線の位置関係

2 直線の 3 つの基本的な位置関係

異なる 2 直線について、空間では次の 3 つの位置関係があります。

1. 交わる
1. 平行
1. ねじれの位置

空間内の 2 直線を分類する手順

異なる 2 直線を、次の順に調べます。

確認すること	確認結果	位置関係
2 直線は交わるか	交わる	交わる
交わらないとき、同一平面上にあるか	同一平面上にある	平行
交わらないとき、同一平面上にあるか	同一平面上にない	ねじれの位置

まず交点の有無を確かめ、交わらない場合だけ同一平面上にあるかを確認します。

立方体で 3 つを見分ける

立方体 $ABCD - EFGH$ で考えます。

交わる例

辺 AB と辺 BF は点 B で交わります。

平行な例

辺 AB と辺 CD は同じ面 ($ABCD$) 上にあり、交わりません。
したがって、

$$AB \parallel CD$$

です。

ねじれの位置の例

辺 AB と辺 CG は交わりません。
また、向きも異なるので平行ではありません。
この 2 直線は同じ 1 つの平面上にもありません。
したがって、 AB と CG はねじれの位置にあります。

交わらないだけでは平行とはいえない

空間では、
交わらない = 平行
ではありません。

交わらない 2 直線について、同一平面上にあれば平行、同一平面上になければねじれの位置です。

直線どうしの垂直

交点で 90 度になる

この講では、2 直線が交わり、その角が 90° のとき、その 2 直線は垂直であるといいます。
立方体では、1 つの頂点から出る異なる方向の辺は互いに垂直です。
たとえば点 A では、

$$AB \perp AD$$

$$AB \perp AE$$

$$AD \perp AE$$

です。

直線どうしの垂直

2 直線の垂直を判断するときは、
1. 2 直線が交わることを確認する。
2. 交わる角が 90° であることを確認する。
という順で考えます。

直線と平面の位置関係

直線と平面の基本的な位置関係

直線 l と平面 α について、基本的な位置関係は次の 3 つです。
1. 直線 l が平面 α 上にある。
2. 直線 l と平面 α が 1 点で交わる。
3. 直線 l と平面 α が交わらず、平行である。

立方体で直線と平面を見る

立方体 $ABCD - EFGH$ を使います。
辺 AB は前面 ($ABFE$) の一部なので、直線 AB は平面 ($ABFE$) 上にあります。
辺 AE と下面 ($ABCD$) は点 A で交わります。
また、辺 AB と上面 ($EFGH$) は交わりません。
上面の辺 EF について $AB \parallel EF$ なので、直線 AB は平面 ($EFGH$) に平行です。

直線と平面が平行になる基本条件

直線 l が平面 α 上にないとしします。
平面 α 上のある直線 m に対して、

$$l \parallel m$$

なら、直線 l は平面 α に平行です。

平面上にある直線は平面に平行とは区別する

直線 AB は平面 $(ABFE)$ 上にあります。

このような場合、この講では「直線 AB は平面 $(ABFE)$ 上にある」と表します。

平面と交わらず離れている場合の「平行」と区別します。

直線と平面の垂直**平面上の 2 本の交わる直線に注目する**

ある直線が平面に垂直かどうかを判断するとき、平面内の 1 本の直線だけを見ても十分ではありません。

直線 l が平面 α と点 P で交わり、平面 α 上で点 P を通る 2 本の交わる直線 a, b の両方に垂直であるとしします。

このとき、直線 l は平面 α に垂直です。

直線と平面の垂直を判断する基本条件

平面 α 上の 2 直線 a, b が点 P で交わっているとします。

直線 l が点 P を通り、

$$l \perp a$$

かつ、

$$l \perp b$$

なら、

$$l \perp \alpha$$

と判断できます。

立方体の縦の辺と下面

立方体で辺 AE と下面 $(ABCD)$ を考えます。

下面上の 2 直線 AB, AD は点 A で交わります。

また、

$$AE \perp AB$$

かつ、

$$AE \perp AD$$

です。

したがって、

$$AE \perp (ABCD)$$

です。

同様に、 BF, CG, DH も下面 $(ABCD)$ に垂直です。

平面に垂直か調べるときは 2 本

直線と平面の垂直を示す基本は、

平面内の交わる 2 直線に、その直線がともに垂直

であることを確認することです。

平面内の 1 本に垂直だけでは不十分

直線 l が平面 α 上の 1 本の直線に垂直であっても、それだけで l が平面 α に垂直とは限りません。平面内の交わる 2 直線に垂直であることを確認します。

2 平面の位置関係

異なる 2 平面の基本的な位置関係

異なる 2 平面について、基本的には次の 2 つの場合があります。

1. 1 本の直線で交わる。
2. 交わず平行である。

同じ平面を重ねて考える場合は、2 平面は一致しています。

立方体の面で考える

立方体の下面 ($ABCD$) と上面 ($EFGH$) は交わりません。対応する辺について、

$$AB \parallel EF$$

$$AD \parallel EH$$

となっています。

この 2 平面は平行です。

一方、下面 ($ABCD$) と前面 ($ABFE$) は辺 AB を共有しています。したがって、この 2 平面は直線 AB で交わります。

平行な 2 平面を判断する基本条件

一方の平面にある交わる 2 直線が、もう一方の平面にある交わる 2 直線にそれぞれ平行であるとき、2 平面が平行であることを判断できます。

立方体では、

- 下面の AB と上面の EF
- 下面の AD と上面の EH

がそれぞれ平行なので、下面と上面は平行です。

2 平面の垂直

一方の平面に他方へ垂直な直線がある

ある平面が、別の平面に垂直な直線を含んでいるとき、その 2 平面は垂直です。

立方体の前面 ($ABFE$) には辺 BF があります。

辺 BF は下面 ($ABCD$) に垂直です。

したがって、前面 ($ABFE$) と下面 ($ABCD$) は垂直です。

2 平面の垂直を判断する基本条件

平面 α が、平面 β に垂直な直線を 1 本含むなら、

$$\alpha \perp \beta$$

と判断できます。

位置関係を判断する順序

空間図形を見る手順

2 直線の場合

1. 交わるかを見る。
2. 交わらなければ、同一平面上にあるかを見る。
3. 同一平面上なら平行、同一平面上でなければねじれの位置と判断する。

直線と平面の場合

1. 直線が平面上にあるかを見る。
2. 平面と 1 点で交わるかを見る。
3. 交わらなければ平行を考える。
4. 垂直を示すときは、平面上の交わる 2 直線との垂直を確認する。

2 平面の場合

1. 共通する直線があるかを見る。
2. 交わらなければ平行を考える。
3. 一方の平面に、他方へ垂直な直線があれば 2 平面は垂直と判断できる。

例題

例題 1

立方体 $ABCD - EFGH$ について、下面を $ABCD$ 、上面を $EFGH$ とし、 E, F, G, H はそれぞれ A, B, C, D の真上にあるものとします。

次の 2 直線の位置関係を、「交わる」「平行」「ねじれの位置」から選びなさい。

- (1) AB と BF
- (2) AB と CD
- (3) AB と CG

例題 1 の解答・解説

- (1) AB と BF は点 B を共有するので、交わります。
- (2) AB と CD は同じ下面 ($ABCD$) 上にあり、交わらないので平行です。
- (3) AB と CG は交わらず、平行でもなく、同じ 1 つの平面上にもありません。したがって、ねじれの位置です。

例題 2

同じ立方体について、次の直線と平面の関係を答えなさい。

- (1) 直線 AB と平面 $(ABFE)$
- (2) 直線 AB と平面 $(EFGH)$
- (3) 直線 AE と平面 $(ABCD)$

例題 2 の解答・解説

- (1) 辺 AB は前面 $(ABFE)$ の辺なので、直線 AB は平面 $(ABFE)$ 上にあります。
- (2) $AB \parallel EF$ で、 EF は平面 $(EFGH)$ 上にあります。また、 AB は平面 $(EFGH)$ 上にはありません。したがって、直線 AB は平面 $(EFGH)$ に平行です。
- (3) AE は下面上の交わる 2 直線 AB, AD の両方に垂直です。したがって、 $AE \perp (ABCD)$ です。

例題 3

同じ立方体について、次の 2 平面の関係を答えなさい。

- (1) 平面 $(ABCD)$ と平面 $(EFGH)$
 - (2) 平面 $(ABCD)$ と平面 $(ABFE)$
- また、(2)では 2 平面が交わる直線も答えなさい。

例題 3 の解答・解説

- (1) 下面 $(ABCD)$ と上面 $(EFGH)$ は交わらないので平行です。
 - (2) 平面 $(ABCD)$ と平面 $(ABFE)$ は辺 AB を共有するので、直線 AB で交わります。
- さらに、前面 $(ABFE)$ に含まれる BF は下面 $(ABCD)$ に垂直なので、この 2 平面は垂直です。

演習問題**練習問題 1**

立方体 $ABCD - EFGH$ について、下面を $ABCD$ 、上面を $EFGH$ とし、 E, F, G, H はそれぞれ A, B, C, D の真上にあるものとします。

次の 2 直線の位置関係を答えなさい。

- (1) AE と CG
- (2) AE と AB
- (3) AE と BC

練習問題 2

同じ立方体で、直線 AB と直線 DH の位置関係を答え、その理由を「交わる」「平行」「同一平面」という言葉を使って説明しなさい。

練習問題 3

同じ立方体について、次の直線と平面の関係を答えなさい。

- (1) EF と平面 $(EFGH)$
- (2) EF と平面 $(ABCD)$
- (3) BF と平面 $(ABCD)$

練習問題 4

同じ立方体について、辺 CG が平面 $(ABCD)$ に垂直である理由を、平面 $(ABCD)$ 上の 2 本の交わる直線を具体的に挙げて説明しなさい。

練習問題 5

同じ立方体について、次の 2 平面の位置関係を答えなさい。

- (1) $(ABFE)$ と $(CDHG)$
- (2) $(ABFE)$ と $(BCGF)$
- (3) $(DAEH)$ と $(BCGF)$

練習問題 6

立方体の下面 $(ABCD)$ と右面 $(BCGF)$ が垂直であることを、右面に含まれる 1 本の辺と下面との関係を使って説明しなさい。

練習問題 7

ある生徒は、
「空間で 2 直線が交わらなければ、その 2 直線は平行である」
と考えました。
この考えが正しくない理由を説明し、交わらない 2 直線を「平行」と「ねじれの位置」に分ける判断基準を答えなさい。

練習問題 8

立方体 $ABCD - EFGH$ で、直線 AB が平面 $(EFGH)$ に平行であることを、平面 $(EFGH)$ 上にある具体的な 1 本の直線を使って説明しなさい。

練習問題 9

次の説明のうち、直線 l が平面 α に垂直であることを判断するのに十分なものを選び、その理由を答えなさい。

- ・ (ア) l は平面 α 上の 1 本の直線だけに垂直である。
- ・ (イ) l は平面 α 上の、同じ点で交わる 2 本の直線の両方に垂直である。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

- (1) AE と CG は同じ向きの縦の辺なので平行です。
(2) AE と AB は点 A で交わります。また、立方体の辺なので $AE \perp AB$ です。
(3) AE と BC は交わらず、平行でもなく、同じ 1 つの平面上にもありません。したがって、ねじれの位置です。

練習問題 2 の解答・解説

AB と DH は交わりません。
また、 AB は横向きの辺、 DH は縦の辺なので平行でもありません。
さらに、2 直線を同時に含む 1 つの平面はありません。
したがって、 AB と DH はねじれの位置です。

練習問題 3 の解答・解説

- (1) EF は上面 ($EFGH$) の辺なので、平面 ($EFGH$) 上にあります。
(2) $EF \parallel AB$ で、 AB は平面 ($ABCD$) 上にあります。また、 EF は平面 ($ABCD$) 上にはありません。したがって、 EF は平面 ($ABCD$) に平行です。
(3) BF は下面 ($ABCD$) と点 B で交わります。さらに、 BF は下面上の交わる 2 直線 BA, BC の両方に垂直なので、 $BF \perp (ABCD)$ です。

練習問題 4 の解答・解説

辺 CG は、下面 ($ABCD$) 上で点 C を通る 2 直線 BC, CD の両方に垂直です。
また、 BC と CD は点 C で交わります。
したがって、平面上の交わる 2 直線にともに垂直であることから、 $CG \perp (ABCD)$ です。

練習問題 5 の解答・解説

- (1) 前面 ($ABFE$) と奥面 ($CDHG$) は交わらない向かい合う面なので、平行です。
(2) 前面 ($ABFE$) と右面 ($BCGF$) は直線 BF で交わります。また、立方体の隣り合う面なので垂直です。
(3) 左面 ($DAEH$) と右面 ($BCGF$) は向かい合う面なので、平行です。

練習問題 6 の解答・解説

右面 ($BCGF$) には辺 BF が含まれています。
辺 BF は下面 ($ABCD$) に垂直です。
一方の平面が、もう一方の平面に垂直な直線を含んでいるので、平面 ($BCGF$) と平面 ($ABCD$) は垂直です。

練習問題 7 の解答・解説

空間では、交わらない 2 直線が同じ平面上にあるとは限りません。
交わらない 2 直線が同一平面上にあれば平行です。
交わらず、同一平面上にもなく、平行でもない場合はねじれの位置です。
したがって、「交わらない」という条件だけでは平行とは判断できません。

練習問題 8 の解答・解説

上面 ($EFGH$) 上には辺 EF があります。
立方体の対応する辺なので、

$$AB \parallel EF$$

です。

また、 AB は平面 ($EFGH$) 上にはありません。

したがって、平面 ($EFGH$) 上の直線 EF に平行であることから、直線 AB は平面 ($EFGH$) に平行です。

練習問題 9 の解答・解説

十分なのは (イ) です。

平面 α 上の同じ点で交わる 2 直線の両方に l が垂直であれば、 l は平面 α に垂直であると判断できます。

平面上の 1 本の直線だけに垂直である (ア) の条件では、平面全体に垂直であるとは限りません。