

第 167 講 モデルを使って予測する

学習目標

- 与えられたモデルの式に数値を代入し、予測値を求めることができる。
- モデルを使うときに、入力単位・範囲・条件を確認できる。
- 観測範囲内の予測である内挿と、観測範囲外へ延長する外挿の違いを説明できる。

モデルを使った予測の考え方

この講で扱う記録・制度・装置などは、すべて教材用に作った架空の設定であり、実在する実測結果や現行制度を表すものではない。文字で表す量は、指定された単位で測った数値として扱う。現実の変化を考えると、すべての状況を正確に計算することは難しい。そのため、数量の関係を簡単な式で表したモデルを作り、その式を使って予測することがある。

本講では、モデルの係数を自分で求め直すことはしない。問題で与えられたモデルの式に、条件に合う入力値を代入して予測値を求める。

モデルから得られた値は、モデルが成り立つと仮定したときの予測値であり、実際の結果を保証するものではない。モデルを使うときは、次の 4 点を確認する。

確認すること	内容
単位	変数がどの単位で測った数値かを確認する
入力条件	モデルへ入れてよい値の条件（整数か実数かなど）を確認する
観測範囲	もとの記録がある入力値の最小値から最大値までの範囲を確認する
延長の仮定	観測範囲外で使う場合、同じ関係が続くか考えるかを確認する

ここで、観測範囲とモデルを使ってよい入力の範囲は同じとは限らない。例えば、観測された入力値が 0 から 8 までも、問題で $0 \leq t \leq 12$ の範囲で使うと指定されていれば、その範囲内ではモデルを使える。

一方、観測範囲の外へモデルを延長するときは、同じ関係が続くという追加の仮定が必要になる。

このような予測を外挿という。

また、入力条件を満たさない値を入れることは、観測範囲外への延長とは別の問題である。モデルを使う前に、入力条件を確認することが重要である。

内挿と外挿

観測された入力値の最小値から最大値までの範囲内にある未観測の値を予測することを内挿という。

一方、観測された範囲の外側へモデルを延長して予測することを外挿という。

内挿であっても予測の正しさが保証されるわけではない。また、外挿では「観測範囲の外でも同じ関係が続く」という追加の仮定が必要になる。

ただし、モデルの入力条件を満たさない値を入れることは外挿とは異なる。例えば、整数個数だけを入力できるモデルへ小数を入れる場合、外挿という名前で正当化することはできない。その値は元のモデルの適用対象外であり、まず入力条件を満たしているかを確認する必要がある。

モデルの式と単位

モデルの係数は、入力する数値の単位と対応している。

例えば、温度のモデル $T = 18 - 0.5t$ では、 t は分、 T は $^{\circ}\text{C}$ を表す数値である。

この式の係数は -0.5 であり、時間が 1 分増えたときの温度の符号付き変化を表している。つまり、1 分あたり -0.5°C 変化するという意味である。

0.5°C はこのモデルでの 1 分あたりの減少量の大きさであり、モデル上の変化の向きは負の符号で表される。

また、時間を入力するモデルでは、単位をそろえてから代入する必要がある。例えば、時間を秒で与えられた場合でも、モデルの変数 t が分を表しているなら、秒を分へ直してから使う。

単位を変えずに数値だけを代入すると、係数が表している変化の意味と合わなくなる。

例題 1

架空の教材用データとして、温度記録について考える。

時刻 t (分) と温度 T ($^{\circ}\text{C}$) の記録は次の通りである。

時刻 t (分)	0	4	8
温度 T ($^{\circ}\text{C}$)	18	16	14

記録された時刻は $t = 0, 4, 8$ だけであり、 $t = 6, 12$ は未観測の時刻である。

この記録をもとに、温度のモデルを $T = 18 - 0.5t$ とする。

検討する入力は $0 \leq t \leq 12$ の実数とし、 $t = 12$ の予測では 12 分まで同じ関係が続くと仮定する。

(1) $t = 6$ のときのモデルによる温度を求めよ。

(2) $t = 12$ のときのモデルによる温度を求めよ。

(3) (1)、(2) で求めた予測が内挿か外挿か答えよ。

例題 1 の解答・解説

モデルの式 $T = 18 - 0.5t$ に時刻を代入する。

(1) $t = 6$ のとき、 $T = 18 - 0.5 \times 6 = 18 - 3 = 15$

したがって、モデルによる予測温度は 15°C である。

(2) $t = 12$ のとき、 $T = 18 - 0.5 \times 12 = 18 - 6 = 12$

したがって、モデルによる予測温度は 12°C である。

(3) $t = 6$ は観測された時刻の範囲 $0 \leq t \leq 8$ の中にあるため、内挿である。

$t = 12$ は観測された時刻の範囲の外側にあるため、外挿である。

ただし、 15°C も 12°C も実際に観測された温度ではなく、モデルの条件のもとで計算した予測値である。特に外挿である $t = 12$ では、12 分まで同じ関係が続くという仮定を置いている。

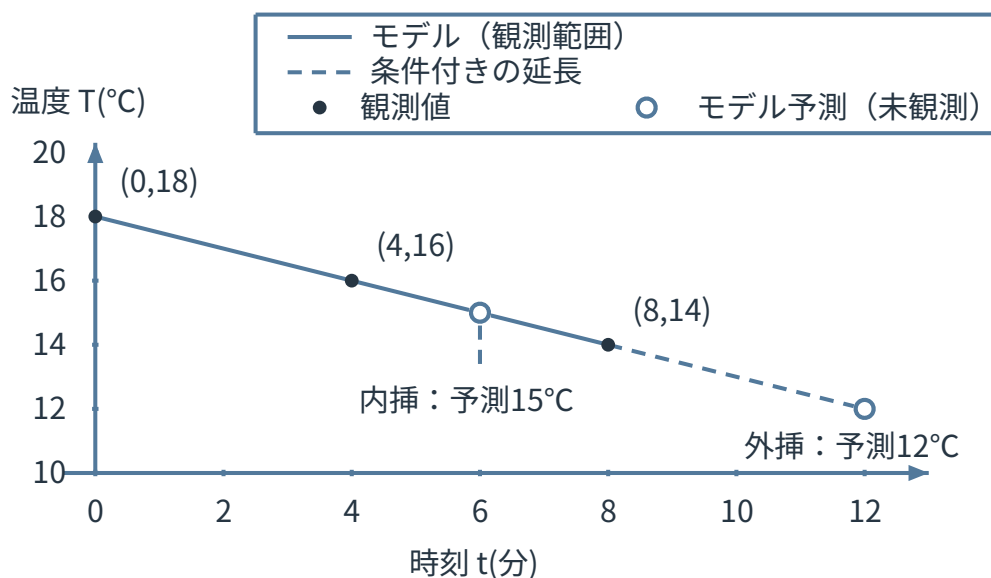


図1 教材用の架空の温度記録に、与えられたモデル $T=18-0.5t$ を重ねた。0～8分は実線、8～12分への条件付き延長は破線で示す。白丸は未観測のモデル予測を示し、入力値の除外を意味しない。6分の15°Cは内挿、12分の12°Cは外挿である。実際の温度が予測値になるとは保証されない。縦軸は10°Cから描き、縦横の縮尺は異なる。

例題 2

架空の制作費を考える。

制作個数を n (個)、制作費を C (円) とし、モデルを $C = 480 + 125n$ とする。

このモデルは $0 \leq n \leq 20$ の整数 n で使うものとし、その他の費用や収入は考えない。

- (1) $n = 12$ と $n = 13$ のときの制作費をそれぞれ求め、2000 円以内かどうか答えよ。
- (2) $n = 12.5$ を代入して得られる制作費を、12.5 個制作する費用として答えてよいか。理由を説明せよ。

例題 2 の解答・解説

(1) $n = 12$ のとき、

$$C = 480 + 125 \times 12 = 480 + 1500 = 1980$$

したがって、制作費の予測値は 1980 円であり、2000 円以内である。

$$n = 13 \text{ のとき、} C = 480 + 125 \times 13 = 480 + 1625 = 2105$$

したがって、制作費の予測値は 2105 円であり、2000 円を超える。

(2) 制作個数 n は整数であるという条件があるため、12.5 を代入して得られる値を「12.5 個制作する費用」と考えることはできない。

モデルの入力条件を満たさない値を入れることは、観測範囲外への延長による外挿とは異なる。

例えば、整数だけを代入できるモデルへ 12.5 を入れる場合、その値は元のモデルの適用対象外である。外挿という呼び方で条件違反を正当化することはできない。

例題 3

架空の装置について考える。

経過時間 t (分) から全体質量 W (kg) を予測するモデルを $W = 5 + 2.4t$ とする。

元の記録がある時刻は $t = 0, 1, 2, 3$ 分であり、観測範囲は $0 \leq t \leq 3$ である。

ただし、この問題ではモデルを使う入力範囲を $0 \leq t \leq 3$ の実数 t としている。したがって、

記録がある値だけでなく、その範囲内の実数を入力して予測することができる。

開始から 90 秒後の予測質量を求めよ。

例題 3 の解答・解説

モデルの入力は分で表した時間であるため、90 秒を分に直す。

90秒は、 $90 \div 60 = 1.5$ より、1.5分である。

したがって、 $t = 1.5$ を代入する。

$$W = 5 + 2.4 \times 1.5 = 5 + 3.6 = 8.6$$

よって、開始から 90 秒後のモデルによる予測質量は 8.6kg である。

ここで、90 をそのまま t に代入すると、形式上は 90 分を入力した計算になる。これは 90 秒とは異なる。また、指定されたモデルの使用範囲 $0 \leq t \leq 3$ から外れるため、本問のモデルへそのまま適用することはできない。

入力する数値の単位と、モデルが認めている範囲を確認することが重要である。

また、8.6kg はモデルから得られた予測値であり、実際に測定された質量ではない。

演習問題**練習問題 1**

架空の教材用データとして、ある量 A を入力値 x から予測するモデル

$$A = 12 + 3x \text{ を考える。}$$

ここで、 x と A は無単位の数値であり、 x は $0 \leq x \leq 10$ の実数とする。この範囲でモデルを使う。

(1) $x = 5$ のときの予測値を求めよ。

(2) 求めた値は実際に測定された値であるといえるか。理由を短く説明せよ。

練習問題 2

架空の教材用データとして、ある装置の温度 T (°C) を開始からの時間 t (分) で予測するモデル

$$T = 30 - 0.8t \text{ を考える。}$$

ここで、 t は分単位の数値で $0 \leq t \leq 20$ の実数、 T は°C単位の数値である。この範囲でモデルを使う。

(1) 開始から 10 分後の予測温度を求めよ。

(2) このモデルでは時間が増えると温度がどのように変化すると考えているか説明せよ。

練習問題 3

架空の教材用データとして、移動距離 D (km) を経過時間 t (分) で予測するモデル $D = 1.5t$ を考える。

ここで、 t は分単位の数値で $0 \leq t \leq 120$ の実数、 D は km 単位の数値である。この範囲でモデルを使う。

- (1) 2 時間後の予測距離を求めよ。
- (2) 時間の単位を分にそろえる必要がある理由を説明せよ。

練習問題 4

架空の教材用データとして、観測された量 y と入力値 x の関係を表すモデル $y = 20 + 2x$ を考える。

x, y は無単位の数値である。記録された入力値は $x = 0, 5, 10$ だけであり、 $x = 6, 15$ は未観測である。この問題では $0 \leq x \leq 15$ の実数 x を検討し、 $x = 15$ へ延長して予測するために必要な仮定を(3)で説明する。

- (1) $x = 6$ の予測は内挿か外挿か答えよ。
- (2) $x = 15$ の予測は内挿か外挿か答えよ。
- (3) $x = 15$ の予測を行う場合、どのような仮定が必要か説明せよ。

練習問題 5

架空の教材用データとして、制作費 C (円) を制作個数 n (個) から予測するモデル $C = 300 + 80n$ を考える。

このモデルは $0 \leq n \leq 30$ の整数 n で使う。

- (1) $n = 10$ のときの予測制作費を求めよ。
- (2) $n = 10.5$ を代入して得られる値を、10.5 個制作する費用として使ってよいか。理由を説明せよ。

練習問題 6

架空の教材用データとして、ある量 B を予測するモデル $B = 50 + 4t$ を考える。

t, B は無単位の数値である。 t は $0 \leq t \leq 8$ の実数として扱う。元の記録は $t = 0, 1, 3, 5$ であり、観測範囲は $0 \leq t \leq 5$ である。 $t = 8$ は未観測であり、8 まで同じ関係が続くと仮定して予測する。

- (1) $t = 8$ の予測値を求めよ。
- (2) この計算が外挿である理由を説明せよ。

練習問題 7

架空の教材用データとして、ある量 M を予測するモデル

$M = 100 - 5x$ を考える。

x, M は無単位の数値であり、 x は $0 \leq x \leq 20$ の実数としてモデルを使う。記録された入力値は $x = 0, 10, 20$ だけであり、 $x = 15$ は未観測である。

- (1) $x = 15$ の予測値を求めよ。
- (2) この予測が内挿であることを説明せよ。
- (3) 内挿であるから必ず実際の値と一致するといえるか。理由を説明せよ。

練習問題 8

架空の教材用データとして、装置の量 W (kg) を時間 t (分) から予測するモデル

$W = 6 + 1.2t$ を考える。

記録された時刻は $t = 0, 2, 4$ 分であり、 $t = 5$ は未観測である。この問題では t を $0 \leq t \leq 5$ の実数として検討し、5 分まで同じ関係が続くと仮定して予測する。

- (1) 5 分後の予測値を求めよ。
- (2) この予測結果を説明するとき、「実際の装置の質量は必ずこの値になる」と言ってよい。理由を説明せよ。

練習問題 1 の解答・解説

- (1) モデル $A = 12 + 3x$ に $x = 5$ を代入する。

$$A = 12 + 3 \times 5 = 12 + 15 = 27$$

したがって、予測値は 27 である。

- (2) 計算で得た 27 はモデルに基づく予測値であり、この計算だけでは実際に測定された事実は確認できない。ただし、実際の測定値がたまたま 27 と一致する可能性まで否定するものではない。

練習問題 2 の解答・解説

- (1) $t = 10$ を代入する。

$$T = 30 - 0.8 \times 10 = 30 - 8 = 22$$

したがって、予測温度は 22°C である。

- (2) t の係数が -0.8 であるため、時間が 1 分増えるとモデル上では温度が 0.8°C 下がる関係を表している。

練習問題 3 の解答・解説

- (1) モデルの時間の単位は分である。

$$2 \text{ 時間は } 120 \text{ 分なので、} D = 1.5 \times 120 = 180$$

したがって、予測距離は 180km である。

- (2) 係数 1.5 は「1 分あたりの距離」を表している。そのため、時間を時間単位のまま代入すると係数の意味と合わなくなる。入力の単位をモデルに合わせる必要がある。

練習問題 4 の解答・解説

- (1) $x = 6$ は観測範囲 $0 \leq x \leq 10$ の中にあるため、内挿である。
- (2) $x = 15$ は観測範囲の外にあるため、外挿である。
- (3) 観測範囲外でも同じ関係が続くという仮定が必要である。この仮定がなければ、モデルをそのまま延長して予測する根拠がない。

練習問題 5 の解答・解説

- (1) $n = 10$ を代入する。
 $C = 300 + 80 \times 10 = 300 + 800 = 1100$
したがって、予測制作費は 1100 円である。
- (2) n は整数という条件があるため、10.5 はモデルの入力条件を満たさない。
この場合は外挿ではない。10.5 は元の整数個数モデルの適用対象外であり、外挿という名称で条件違反を正当化することはできない。また、10.5 を四捨五入して別の整数個数へ変えることは、与えられた入力を別の入力へ勝手に変更することになる。

練習問題 6 の解答・解説

- (1) $t = 8$ を代入する。
 $B = 50 + 4 \times 8 = 50 + 32 = 82$
したがって、予測値は 82 である。
- (2) 観測範囲は $0 \leq t \leq 5$ であり、 $t = 8$ はその外側にある。そのため、観測範囲外でも同じ関係が続くという仮定を置いた外挿である。

練習問題 7 の解答・解説

- (1) $x = 15$ を代入する。
 $M = 100 - 5 \times 15 = 100 - 75 = 25$
したがって、予測値は 25 である。
- (2) 15 は観測範囲 $0 \leq x \leq 20$ の中にあるため、内挿である。
- (3) 内挿であっても、モデルが現実を完全に表すとは限らない。モデルから得た値は予測値であり、実際の値と一致する保証はない。

練習問題 8 の解答・解説

- (1) 5 分後は $t = 5$ である。
 $W = 6 + 1.2 \times 5 = 6 + 6 = 12$
したがって、5 分後の予測値は 12kg である。
- (2) 「実際の装置の質量は必ず 12kg になる」とは言えない。この値は、5 分後まで同じ関係が続くという仮定のもとでモデルから求めた予測値である。実際の結果を保証する値ではない。