

第 171 講 数列の極限の計算

学習目標

この講では、数列の極限を計算するときに、条件を確認して基本的な極限へ帰着する考え方を身につける。

教材終了後には、次のことができるようになる。

- ・収束する数列の和・差・定数倍・積・商の極限を、条件を確認して計算できる。
- ・分子と分母を同じ n の累乗で割る操作が分数の値を変えない理由を説明できる。
- ・分母の極限が 0 の場合など、極限の法則をそのまま適用できない場面を判断できる。

極限の計算は基本極限への帰着で考える

数列の極限の計算では、複雑な式をそのまま眺めるのではなく、既に知っている基本的な極限へ変形することが重要である。

特に、 n が大きくなる分数では、分子の次数が分母の次数以下の場合、分母の最高次数に対応する n の累乗で分子と分母を両方割る。すると、定数と $\frac{1}{n}$ の正整数乗を含む形へ整理でき、変形後の分母の極限は分母の最高次係数という 0 でない値になる。この条件の範囲で、商の法則を使える形へ帰着できる。

例えば、 n が増えるほど $\frac{1}{n}$ は小さくなり、0 に近づく。この性質を利用すると、複雑な式の極限を定数の計算へ置き換えられる。

ただし、極限の法則は条件付きで使う。特に商の法則では、分母の極限が 0 でないことが必要である。

収束する数列の極限の法則

数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ は、 n を正整数として各項が実数であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$$

を満たすとする。ただし、 α 、 β は有限の実数である。また、 c は n に依存しない実定数とする。このとき、次の極限の法則が成り立つ。

- ・和では $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$ である。
- ・差では $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$ である。
- ・定数倍では $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c\alpha$ である。
- ・積では $\lim_{n \rightarrow \infty} a_nb_n = \alpha\beta$ である。

さらに、 $\beta \neq 0$ のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$$

が成り立つ。

商を考えると、分母が 0 でない項について数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ を定義する。 $\beta \neq 0$ ならば、十分大きい n では $b_n \neq 0$ となるため、その範囲で商は定義でき、極限を考えられる。初めの有限個の項で $b_n = 0$ となる場合でも、その項を使って商の値を計算してはいけない。

基本極限と計算の視点

基本となる極限として、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

を用いる。

また、固定された正整数 r に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0$$

も成り立つ。 $\frac{1}{n^r}$ は $\frac{1}{n}$ を r 個掛けたものであり、 $r = 1$ のときは基本極限そのもの、 $r \geq 2$ のときは積の法則を有限回使うことで導ける。

分数の式変形では、分子と分母を同じ非零の式で割る。これにより分数全体の値を変えずに、計算しやすい形へ整理できる。ただし、分子の次数が分母の次数より高い場合など、同じ操作だけで必ず有限の極限が得られるわけではない。

極限計算で注意すること

極限の式で分母の極限が 0 になった場合、商の法則はそのまま使えない。

例えば、

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

はすべての正整数 n で成り立つため、極限は 1 である。

したがって、分母の極限が 0 だから必ず極限が存在しない、とはいえない。式全体を変形して判断する必要がある。

また、 ∞ を普通の実数のように代入して計算してはいけない。無限大は数値ではなく、数列の変化の様子を表す考え方である。

$0/0$ や $\frac{\infty}{\infty}$ は極限值を表す数ではなく、分子と分母の極限の形だけから商の極限を決められないことを意味する目印である。元の数列を変形し、極限の条件を確認して判断する必要がある。

例題 1

数列 $a_n = (2 + \frac{1}{n})(3 - \frac{2}{n})$ の極限を求めなさい。

例題 1 の解答・解説

$n \rightarrow \infty$ のとき、 $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ である。

したがって、和・差・積の極限の法則を使える。

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \left(3 - \frac{2}{n}\right) \\ &= (2 + 0)(3 - 0) \\ &= 6\end{aligned}$$

よって、求める極限は 6 である。

例題 2

数列 $a_n = \frac{3n+1}{2n-1}$ の極限を求めなさい。

例題 2 の解答・解説

分子と分母はともに n の 1 次式であるため、最高次数の n で分子と分母を割る。

$$\begin{aligned}\frac{3n+1}{2n-1} &= \frac{n\left(3 + \frac{1}{n}\right)}{n\left(2 - \frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{3 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}}\end{aligned}$$

ここで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$$

であり、分母の極限は 0 ではない。
したがって、商の法則を使える。

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n-1} &= \frac{3+0}{2-0} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

よって、求める極限は $\frac{3}{2}$ である。

例題 3

数列 $a_n = \frac{2n+1}{n^2+1}$ の極限を求めなさい。

例題 3 の解答・解説

分子の最高次数は 1 次、分母の最高次数は 2 次である。分子・分母を分母の最高次数である n^2 で割る。

$$\begin{aligned}\frac{2n+1}{n^2+1} &= \frac{\frac{2n+1}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^2}} \\ &= \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}\end{aligned}$$

分母の極限を確認すると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1$$

であり、0 ではない。

したがって、商の法則を使える。

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n^2+1} &= \frac{0+0}{1+0} \\ &= 0\end{aligned}$$

よって、求める極限は 0 である。

この例では、分子と分母を同じ n^2 で割り、基本極限と商の法則の条件へ帰着した。

演習問題

練習問題 1

数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ は、 n を正整数として各項が実数であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -1$$

を満たす。また、すべての正整数 n で $b_n \neq 0$ とする。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - 2b_n)$ を求めなさい。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$ を求めなさい。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ を求めなさい。

練習問題 2

数列 $a_n = \frac{5n-2}{n+3}$ の極限を求めなさい。

練習問題 3

数列 $a_n = \frac{4n^2-n+1}{2n^2+3}$ の極限を求めなさい。

練習問題 4

数列 $a_n = \frac{n^2}{n+2}$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) $a_n = n - 2 + \frac{4}{n+2}$ が成り立つことを確かめなさい。
(2) 任意の正の実数 M に対して、 $N > M + 2$ を満たす正整数 N を選ぶとき、 $n \geq N$ ならば $a_n > M$ となることを示し、 a_n が $+\infty$ に発散することを説明しなさい。

練習問題 5

数列 $a_n = \frac{3n^2+1}{n^3+2n+1}$ の極限を求めなさい。

練習問題 6

数列

$$a_n = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}{2 + \frac{1}{n}}$$

の極限を求めなさい。

練習問題 7

数列

$$a_n = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}$$

について、分子と分母の極限だけから判断せず、式を変形して極限を求めなさい。

練習問題 8

数列 $a_n = \frac{n+2}{2n+3}$ について、次の問いに答えなさい。
分子だけを n で割ると、

$$\frac{1 + \frac{2}{n}}{2n + 3}$$

となる。この変形が誤りである理由を説明し、正しい方法で極限を求めなさい。

練習問題 1 の解答・解説

収束する数列の和・差・定数倍・積・商の法則を使う。ただし、商の法則では分母の極限が 0 でないことを確認する必要がある。

(1)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - 2b_n) &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \\ &= 8\end{aligned}$$

よって、極限は 8 である。

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= 2 \cdot (-1) \\ &= -2\end{aligned}$$

よって、極限は -2 である。

(3) 分母について、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -1 \neq 0$$

であるため、商の法則を使える。

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \\ &= \frac{2}{-1} \\ &= -2\end{aligned}$$

よって、極限は -2 である。

練習問題 2 の解答・解説

分子と分母の最高次数はともに 1 次であるため、分子と分母を n で割る。

$$\begin{aligned}\frac{5n-2}{n+3} &= \frac{n(5-\frac{2}{n})}{n(1+\frac{3}{n})} \\ &= \frac{5-\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}\end{aligned}$$

分母の極限を確認すると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right) = 1 \neq 0$$

である。

したがって、商の法則より、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-2}{n+3} &= \frac{5-0}{1+0} \\ &= 5\end{aligned}$$

よって、極限は 5 である。

練習問題 3 の解答・解説

分子と分母の最高次数はともに 2 次であるため、分子と分母を n^2 で割る。

$$\frac{4n^2 - n + 1}{2n^2 + 3} = \frac{4 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{3}{n^2}}$$

分母の極限を確認すると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{n^2}\right) = 2 \neq 0$$

である。

よって、商の法則より、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - n + 1}{2n^2 + 3} &= \frac{4 - 0 + 0}{2 + 0} \\ &= 2\end{aligned}$$

よって、極限は 2 である。

練習問題 4 の解答・解説

(1) 右辺を通分すると、

$$\begin{aligned} n - 2 + \frac{4}{n+2} &= \frac{(n-2)(n+2) + 4}{n+2} \\ &= \frac{n^2 - 4 + 4}{n+2} \\ &= \frac{n^2}{n+2} \end{aligned}$$

したがって、 $a_n = n - 2 + \frac{4}{n+2}$ である。

(2) 任意の正の実数 M に対して、 $N > M + 2$ を満たす正整数 N を選ぶ。

$n \geq N$ のとき、

$$n - 2 \geq N - 2 > M$$

である。

また、 $\frac{4}{n+2} > 0$ だから、 $a_n = n - 2 + \frac{4}{n+2} > n - 2 > M$ となる。

したがって、任意の $M > 0$ に対して、十分大きい n では $a_n > M$ となる。

よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

である。

この数列では、元の分子 n^2 と分母 $n+2$ はともに有限の実数へ収束しないため、有限の極限に対する商の法則の前提を満たさない。また、分子と分母を n^2 で割ると、分母は $\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}$ となり、その極限は 0 であるため、 $\beta \neq 0$ の条件も満たさない。このため、商の法則ではなく、恒等変形と不等式によって $+\infty$ への発散を確認した。

練習問題 5 の解答・解説

分子の最高次数は 2 次、分母の最高次数は 3 次であるため、分子と分母を n^3 で割る。

$$\frac{3n^2 + 1}{n^3 + 2n + 1} = \frac{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}$$

分母の極限を確認すると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) = 1 \neq 0$$

である。

したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{n^3 + 2n + 1} &= \frac{0 + 0}{1 + 0 + 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、極限は 0 である。

練習問題 6 の解答・解説

$\frac{1}{n} \rightarrow 0$ を利用する。
分母の極限を確認すると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2 \neq 0$$

である。
したがって、商の法則を使える。

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n} \right)^2}{2 + \frac{1}{n}} &= \frac{(1 - 0)^2}{2 + 0} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって、極限は $\frac{1}{2}$ である。

練習問題 7 の解答・解説

分子と分母はともに 0 へ近づくため、 $\frac{0}{0}$ をそのまま計算してはいけない。
式を変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} &= \frac{1}{n^2} \cdot n \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

である。
 $\frac{0}{0}$ は極限計算の結果を表す値ではなく、式を変形して判断する必要がある。

練習問題 8 の解答・解説

分子だけを n で割ると、分母には同じ操作をしていないため、元の分数とは一般に異なる値になる。
実際、 $\frac{n+2}{2n+3}$ を分子だけ割った式

$$\frac{1 + \frac{2}{n}}{2n + 3}$$

は、元の式を $\frac{1}{n}$ 倍した形であり、恒等変形ではない。 $n = 1$ のときは偶然一致するが、 $n = 2$ では元の値が $\frac{4}{7}$ 、誤った式の値が $\frac{2}{7}$ となり一致しない。
正しくは分子と分母を同時に n で割る。

$$\begin{aligned}\frac{n+2}{2n+3} &= \frac{n\left(1 + \frac{2}{n}\right)}{n\left(2 + \frac{3}{n}\right)} \\ &= \frac{1 + \frac{2}{n}}{2 + \frac{3}{n}}\end{aligned}$$

分母の極限を確認すると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2 \neq 0$$

である。
したがって、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+3} &= \frac{1+0}{2+0} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって、極限は $\frac{1}{2}$ である。