

第 82 講 恒等式

学習目標

- ・ 恒等式と方程式の違いを、「すべての x で成立するか」という観点から説明できる。
- ・ 恒等式を整理し、同じ次数の項の係数を比較して未知の係数を求められる。
- ・ 適切な値を代入して、未知の係数を効率よく求められる。
- ・ 求めた係数を元の式へ戻し、両辺が同じ式になることを確認できる。

恒等式で見るポイント

恒等式では、「ある特定の x で成立する」ことではなく、「すべての x で成立する」ことが重要である。

多項式どうしの恒等式では、両辺を同じ形に整理すると、同じ次数の項の係数がそれぞれ等しくなる。

例えば、

$$ax^2 + bx + c = 3x^2 - 2x + 5$$

が x についての恒等式なら、 x^2 の係数、 x の係数、定数項をそれぞれ比較して、

$$a = 3, \quad b = -2, \quad c = 5$$

である。

係数を求めた後は、元の式に代入して本当にすべての x で両辺が一致するかを確認する。

恒等式と方程式の違い

次の 2 つの等式を比べる。

$$2(x + 1) = 2x + 2$$

左辺を展開すると $2x + 2$ となるため、この等式はどの x を代入しても成立する。このように、文字にどの値を代入しても成立する等式を恒等式という。

一方、

$$x + 1 = 3$$

は $x = 2$ のときには成立するが、すべての x で成立するわけではない。このように、特定の値を求める等式は方程式である。

したがって、恒等式では「解を求める」のではなく、「すべての x で両辺が同じになるための条件を考える」のである。

いくつかの値で一致しただけでは十分ではない

$x = 0$ や $x = 1$ など、いくつかの値を代入して両辺が一致しても、それだけで恒等式であるとはいえない。

恒等式であることを確かめるには、両辺を整理して同じ式になることを確認する必要がある。未知の係数を求めるために特定の値を代入する方法は有効であるが、係数を求めた後には、その値を元の式へ戻して両辺がすべての x で一致することを確認する。

係数比較法

多項式の恒等式では、両辺を同じ次数について整理すると、対応する係数が等しくなる。

例えば、

$$(x+1)(x+a)+b=x^2+5x+7$$

が x についての恒等式であるとする。

左辺を展開すると、

$$\begin{aligned}(x+1)(x+a)+b &= x^2+ax+x+a+b \\ &= x^2+(a+1)x+(a+b)\end{aligned}$$

となる。

右辺は x^2+5x+7 であるから、 x の係数と定数項を比較して、

$$a+1=5$$

および

$$a+b=7$$

を得る。

このように、係数比較を行う前には、両辺を「同じ次数の項が見える形」まで整理することが必要である。

適切な値を代入する方法

未知の係数を含む式に $(x-1)$ や $(x+2)$ のような因数がある場合、その因数を 0 にする値を代入すると計算が簡単になることがある。

例えば、

$$A(x-1)+B(x+2)=5x+1$$

が x についての恒等式であるとする。

$x=1$ を代入すると $A(x-1)$ の部分が 0 になるため、 B だけを含む式が得られる。

同様に、 $x=-2$ を代入すると $B(x+2)$ の部分が 0 になり、 A だけを含む式が得られる。

ただし、この方法でいくつかの値を代入するのは、恒等式を証明するためではなく、未知の係数を求めやすくするためである。最後には求めた係数を元の式へ戻し、両辺を整理して一致することを確認する。

解法の要点

係数を求めるための代入と、恒等式であることの証明は区別する。答えを求めた後、元の両辺を展開・整理してすべての x で一致することを確認する。

例題

例題 1

次の等式が x についての恒等式か、方程式かを答えよ。

$$3(x-2)+6=3x$$

例題 1 の解答・解説

左辺を整理すると、

$$\begin{aligned}3(x-2)+6 &= 3x-6+6 \\ &= 3x\end{aligned}$$

となる。

したがって、左辺と右辺はすべての x で一致する。

よって、この等式は x についての恒等式である。

例題 2

次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a, b の値を求めよ。

$$(x+1)(x+a)+b=x^2+5x+7$$

例題 2 の解答・解説

係数を比較できるように左辺を展開する。

$$(x+1)(x+a)+b=x^2+(a+1)x+(a+b)$$

したがって、恒等式は

$$x^2+(a+1)x+(a+b)=x^2+5x+7$$

となる。

x の係数を比較すると、

$$a+1=5$$

であるから、 $a=4$ である。

定数項を比較すると、

$$a+b=7$$

である。 $a=4$ を代入して、 $b=3$ を得る。

したがって、 $a=4$, $b=3$ である。

検算すると、

$$\begin{aligned}(x+1)(x+4)+3 &= x^2+5x+4+3 \\ &= x^2+5x+7\end{aligned}$$

となり、すべての x で右辺と一致する。

例題 3

次の等式が x についての恒等式となるように、定数 A, B の値を求めよ。

$$A(x-1)+B(x+2)=5x+1$$

例題 3 の解答・解説

$x = 1$ を代入すると、 $A(x - 1)$ が 0 になる。

$$3B = 6$$

より、 $B = 2$ である。

次に $x = -2$ を代入すると、 $B(x + 2)$ が 0 になる。

$$-3A = -9$$

より、 $A = 3$ である。

したがって、 $A = 3$, $B = 2$ である。

求めた値を元の左辺へ代入すると、

$$\begin{aligned} 3(x - 1) + 2(x + 2) &= 3x - 3 + 2x + 4 \\ &= 5x + 1 \end{aligned}$$

となる。

右辺と同じ式になったため、すべての x で成立することが確認できる。

演習問題

演習問題 1

次の等式が x についての恒等式か、方程式かを答えよ。

$$4(x + 2) - 3x = x + 8$$

演習問題 2

次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a の値を求めよ。

$$ax + 4 = 5x + 4$$

演習問題 3

次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a, b の値を求めよ。

$$x^2 + ax + b = (x + 2)(x + 3)$$

演習問題 4

次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a, b の値を求めよ。

$$(x + a)(x + 2) + b = x^2 + 7x + 12$$

演習問題 5

次の等式が x についての恒等式となるように、定数 A, B の値を求めよ。

$$A(x - 2) + B(x + 1) = 5x - 1$$

演習問題 6

次の等式が x についての恒等式となるように、定数 A, B の値を求めよ。

$$A(x+2) + B(x-1) = x+8$$

演習問題 7

次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a, b の値を求めよ。

$$(x+1)(2x+a) + b = 2x^2 + 7x + 9$$

演習問題の解答・解説

演習問題 1 の解答・解説

左辺を整理すると、

$$\begin{aligned} 4(x+2) - 3x &= 4x + 8 - 3x \\ &= x + 8 \end{aligned}$$

となる。

したがって、すべての x で両辺が一致するため、恒等式である。

演習問題 2 の解答・解説

恒等式

$$ax + 4 = 5x + 4$$

で x の係数を比較する。

$$a = 5$$

となる。

定数項は両辺ともに 4 で一致している。

したがって、 $a = 5$ である。元の式へ代入すると $5x + 4 = 5x + 4$ となり、すべての x で成立する。

演習問題 3 の解答・解説

右辺を展開すると、

$$(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$$

となる。

したがって、

$$x^2 + ax + b = x^2 + 5x + 6$$

である。

x の係数を比較して $a = 5$ 、定数項を比較して $b = 6$ を得る。

よって、 $a = 5$, $b = 6$ である。

代入すると両辺とも $x^2 + 5x + 6$ となり、恒等式であることを確認できる。

演習問題 4 の解答・解説

左辺を展開すると、

$$(x + a)(x + 2) + b = x^2 + (a + 2)x + 2a + b$$

となる。

x の係数を比較すると、

$$a + 2 = 7$$

より、 $a = 5$ である。

定数項を比較すると、

$$2a + b = 12$$

である。 $a = 5$ を代入すると、 $b = 2$ となる。

したがって、 $a = 5$, $b = 2$ である。

検算すると、

$$\begin{aligned}(x + 5)(x + 2) + 2 &= x^2 + 7x + 10 + 2 \\ &= x^2 + 7x + 12\end{aligned}$$

となる。

演習問題 5 の解答・解説

$x = 2$ を代入すると、 $3B = 9$ より $B = 3$ である。

$x = -1$ を代入すると、 $-3A = -6$ より $A = 2$ である。

したがって、 $A = 2$, $B = 3$ である。検算すると、

$$2(x - 2) + 3(x + 1) = 5x - 1$$

となり、すべての x で右辺と一致する。

演習問題 6 の解答・解説

$x = 1$ を代入すると、

$$3A = 9$$

より、 $A = 3$ である。

$x = -2$ を代入すると、

$$-3B = 6$$

より、 $B = -2$ である。

したがって、 $A = 3$, $B = -2$ である。

検算すると、

$$\begin{aligned}3(x + 2) - 2(x - 1) &= 3x + 6 - 2x + 2 \\ &= x + 8\end{aligned}$$

となり、右辺と一致する。

演習問題 7 の解答・解説

左辺を展開して係数を比較できる形にする。

$$(x+1)(2x+a)+b=2x^2+(a+2)x+a+b$$

x の係数を比較すると、

$$a+2=7$$

より、 $a=5$ である。

定数項を比較すると、

$$a+b=9$$

であるから、 $b=4$ となる。

したがって、 $a=5$, $b=4$ である。

検算すると、

$$\begin{aligned}(x+1)(2x+5)+4 &= 2x^2+7x+5+4 \\ &= 2x^2+7x+9\end{aligned}$$

となる。