第 253 講 商の図形的意味

学習目標

- 複素数の商では、絶対値を割り、偏角を引く理由を説明できる。
- $\frac{z}{w}$ を、$\frac{1}{w}$ を掛ける操作として図形的に捉えられる。
- 分母が 0 でないことを確認し、分子が 0 の場合を分けて扱える。
- 極形式と $a+bi$ の形を行き来し、商に対応する点を求められる。

1. 商は「逆数を掛けること」である

逆数では大きさが逆数になり、偏角の符号が反対になる

$w \neq 0$ を

$$w = s(\cos\beta + i\sin\beta) \qquad (s = |\,w\,| > 0)$$

とする。絶対値を $\frac{1}{s}$、偏角を $-\beta$ とする複素数を掛けると、

$$w \cdot \frac{1}{s}\{\cos(-\beta) + i\sin(-\beta)\} = 1$$

となる。したがって、

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{s}\{\cos(-\beta) + i\sin(-\beta)\}$$

である。逆数を掛ける操作は、原点からの距離を $\frac{1}{|w|}$ 倍し、$-\arg w$ だけ回転する操作である。

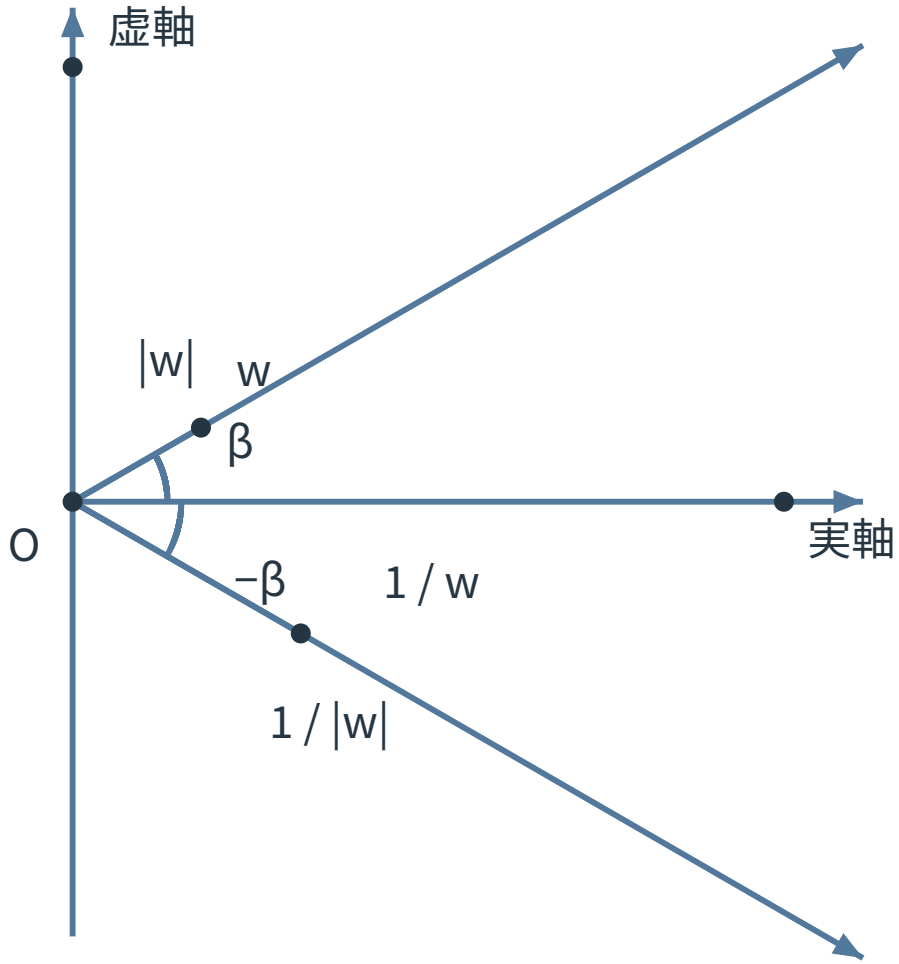

図 1　w から $\frac{1}{w}$ へは距離が逆数になり、偏角の符号が反対になる

例題 1：逆数を極形式で表す

$w = 2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}$ の逆数を極形式と $a + bi$ の形で表し、図形的な変化を説明せよ。

例題 1 の解答・解説

絶対値は $\frac{1}{2}$、偏角は $-\frac{\pi}{3}$ となるので、

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

である。逆数を掛けると距離を $\frac{1}{2}$ 倍し、時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転する。

逆数の二つの変化を先に読む

$\frac{1}{w}$ の絶対値は $\frac{1}{|w|}$、偏角は $-\arg w$ である。商は、この逆数を掛ける操作として捉えるとよい。

2. 商では絶対値を割り、偏角を引く

商の公式を積の公式から導く

$z \neq 0$、$w \neq 0$ とし、

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$$

とする。$\frac{z}{w} = z \cdot \left(\frac{1}{w}\right)$ であり、逆数の絶対値は $\frac{1}{s}$、偏角は $-\beta$ である。積では絶対値を掛け、偏角を加えるから、

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}\{\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)\}$$

となる。ここから、商では絶対値を割り、偏角を引くことが分かる。

複素数の商の絶対値と偏角

$w \neq 0$ のとき、すべての複素数 z について $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ である。さらに $z \neq 0$ なら、

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) \equiv \arg z - \arg w \pmod{2\pi}$$

である。商 $\frac{z}{w}$ そのものは、w の向きから z の向きまでの差と、$|w|$ に対する $|z|$ の倍率を同時に表す。一方、「z を w で割る操作」に注目すれば、z に対応する点を原点中心に $\frac{1}{|w|}$ 倍し、$-\arg w$ だけ回転する操作である。この二つの読み方を区別することが大切である。

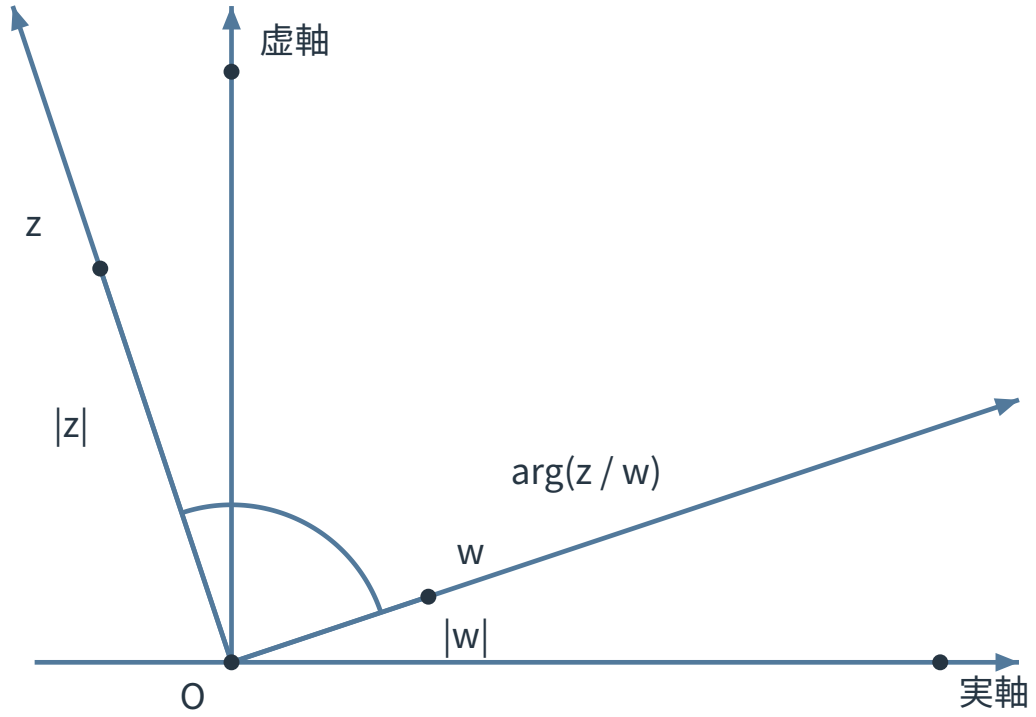

図 2　$\frac{z}{w}$ は w から z への長さの倍率と向きの差を表す

引く順序を図で確認する

$\frac{z}{w}$ の偏角は「分子の偏角から分母の偏角を引く」。図では、分母 w の向きから分子 z の向きへの有向角が $\arg\left(\frac{z}{w}\right)$ であると読むと、$\alpha-\beta$ の順序を取り違えにくい。

例題 2：商を極形式で求める

$z=6\left\{\cos\left(5\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(5\frac{\pi}{6}\right)\right\}$、$w=2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}$ とする。$\frac{z}{w}$ を極形式で表し、z からの移り方を説明せよ。

例題 2 の解答・解説

絶対値は $\frac{6}{2}=3$、偏角は

$$\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$$

である。したがって、

$$\frac{z}{w}=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=3i$$

である。z に対応する点の距離を $\frac{1}{2}$ 倍し、時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回した点である。

3. 0 の扱いと共役複素数による計算

分母の 0 と分子の 0 は区別する

$\frac{z}{w}$ は $w\neq0$ のときに限って定義される。分母が 0 なら商は定義されない。一方、$w\neq0$ なら $\frac{0}{w}=0$ である。ただし、0 の偏角は定義されないため、分子が 0 の場合に偏角の差の公式を使ってはならない。

$a+bi$ の形では分母を実数にする

$w\neq0$ のとき、分母と分子に $\overline{w}$ を掛ければ、$w\overline{w}=|\,w\,|^2$ は正の実数になる。したがって、

$$\frac{z}{w}=\frac{z\overline{w}}{w\overline{w}}=\frac{z\overline{w}}{|\,w\,|^2}$$

である。この計算は、絶対値が $\frac{|z|}{|w|}$ となることと一致する。さらに $z\neq0$ なら、$\overline{w}$ の偏角は $-\arg w$ であるため、商の偏角が $\arg z-\arg w$ となることとも一致する。

例題 3：直交形式の商を図形的に読む

$z=1+\sqrt{3}i$、$w=1+i$ とする。$\frac{z}{w}$ を $a+bi$ の形と極形式で表し、z に対応する点からの移り方を説明せよ。

例題 3 の解答・解説

共役複素数を用いると、

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}=\frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

である。また、$|\,z\,|=2$、$\arg z=\frac{\pi}{3}$、$|\,w\,|=\sqrt{2}$、$\arg w=\frac{\pi}{4}$ なので、

$$\frac{z}{w}=\sqrt{2}\left\{\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right\}$$

である。z に対応する点の距離を $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍し、時計回りに $\frac{\pi}{4}$ だけ回した点である。

4. 演習問題

演習 1：逆数の図形的意味

$w=3\left\{\cos\left(2\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\frac{\pi}{3}\right)\right\}$ とする。$\frac{1}{w}$ を極形式で表し、逆数を掛ける操作を説明せよ。

演習 2：極形式の商

次の商を極形式で表せ。ただし、偏角は $0\le\theta<2\pi$ の範囲で答えよ。

(1)　$\dfrac{8\left\{\cos\left(3\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(3\frac{\pi}{4}\right)\right\}}{2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}}$

(2)　$\dfrac{3\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}}{6\left\{\cos\left(5\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(5\frac{\pi}{3}\right)\right\}}$

演習 3：商の点の移り方

$w=\sqrt{3}\left\{\cos\left(5\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(5\frac{\pi}{6}\right)\right\}$ とする。0 でない複素数 z を w で割ると、z に対応する点はどのように移るか説明せよ。

演習 4：直交形式で割る

$z=4+2i$、$w=1-2i$ とする。$\frac{z}{w}$ を $a+bi$ の形で表し、絶対値が $\frac{|z|}{|w|}$ と一致することを確かめよ。

演習 5：商から分子を求める

$w=2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}$、$\frac{z}{w}=3\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}$ である。z を極形式で求めよ。

演習 6：0 を含む商

各式が定義されるかを答え、定義されるものは値を求めよ。
(1) $\frac{0}{2-i}$　(2) $\frac{2-i}{0}$　(3) $\frac{0}{0}$

5. 演習の解答・解説

演習 1 の解答・解説

絶対値を逆数にし、偏角の符号を反対にするので、

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{3}\left\{\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right\}$$

である。逆数を掛ける操作は、原点からの距離を $\frac{1}{3}$ 倍し、時計回りに $2\frac{\pi}{3}$ だけ回転する操作である。

演習 2 の解答・解説

(1) 絶対値は $\frac{8}{2} = 4$、偏角は

$$\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{12}$$

なので、答えは

$$4\left\{\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right\}$$

である。
(2) 絶対値は $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$、偏角の差は $\frac{\pi}{6} - 5\frac{\pi}{3} = -3\frac{\pi}{2}$ である。指定された範囲では $\frac{\pi}{2}$ なので、答えは

$$\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right\} = \frac{1}{2}i$$

である。

演習 3 の解答・解説

w で割ることは $\frac{1}{w}$ を掛けることである。したがって、原点からの距離を $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍し、時計回りに $5\frac{\pi}{6}$ だけ回転する。これは反時計回りに $7\frac{\pi}{6}$ だけ回転することと同じである。

演習 4 の解答・解説

$$\frac{4+2i}{1-2i} = \frac{(4+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{10i}{5} = 2i$$

である。また、$|z| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$、$|w| = \sqrt{5}$ なので、$\frac{|z|}{|w|} = 2$ である。実際、$|2i| = 2$ で一致する。

演習 5 の解答・解説

$z = w \cdot \left(\frac{z}{w}\right)$ である。絶対値を掛け、偏角を加えると、

$$z = 6\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right\} = 6\left\{\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right\}$$

である。

演習 6 の解答・解説

(1) は分母が 0 でないので定義され、値は 0 である。(2) と (3) は分母が 0 なので定義されない。特に (1) の値 0 には偏角がないため、偏角の差の公式では扱わない。

©ミライコーチング