

第 73 講 整数を利用して問題を解く

学習目標

- 文章中の「何個おき」「何分ごと」「余る」「同じ大きさに分ける」といった条件を整数の式へ直せる。
- 周期が重なる問題を、公倍数や最小公倍数を使って解ける。
- 等間隔や同じ個数に分ける問題を、公約数や最大公約数を使って解ける。
- 「割ると余る」という条件を $n = aq + r$ の形で表し、小さい整数問題を解ける。

整数の知識を文章題へつなげる

文章の言葉を整数の条件に変える

整数の問題では、計算そのものよりも、文章中の条件をどの整数の性質へ結び付けるかが重要である。

たとえば、次の言葉には対応する見方がある。

文章中の表現	整数としての見方
6 個ずつ並べられる	6 の倍数
5 で割ると 2 余る	$5q + 2$ の形
4 分ごとと 6 分ごとが再び重なる	4 と 6 の公倍数
2 種類の個数を同じ組数に分ける	共通の約数
できるだけ多くの同じ組に分ける	最大公約数
最初に再び同時になる	最小公倍数

問題を読んだら、まずこの翻訳を行うことが基本である。

整数問題の基本手順

1. 何を整数として表すか決める。
2. 文章中の条件を、倍数・約数・余りの式へ直す。
3. 最大公約数・最小公倍数・倍数の列挙など、条件に合う方法を選ぶ。
4. 得られた整数を文章の意味に戻して答える。

「倍数」という条件を式にする

a の倍数は ak と表せる

整数 n が 6 の倍数であるなら、ある整数 k を用いて、

$$n = 6k$$

と表せる。

同様に、 n が 8 の倍数なら、

$$n = 8k$$

という形になる。

文章題で「6 個ずつ分けても余らない」と書かれている場合も、その個数は 6 の倍数である。

倍数条件の表し方

整数 n が正の整数 a の倍数であることは、ある整数 k を用いて、

$$n = ak$$

と表せる。

周期が重なるときは公倍数

何分後に再び同時になるか

ある合図 A は 6 分ごと、合図 B は 8 分ごとに鳴るとする。

今、2 つが同時に鳴った。

A が再び鳴る時刻は、

$$6, 12, 18, 24, \dots$$

分後である。

B が再び鳴る時刻は、

$$8, 16, 24, 32, \dots$$

分後である。

両方が同時に鳴る時刻は 6 と 8 の公倍数であり、最初に再び同時になるのは最小公倍数である。

6 と 8 の最小公倍数は 24 なので、24 分後に再び同時に鳴る。

周期の問題と最小公倍数

「何分ごと」「何秒ごと」「何日ごと」のように、一定の周期で繰り返すものが**最初に再び同時に
なる時点**を求めるときは、最小公倍数を考える。

最初に同時になるなら最小を選ぶ

公倍数は 1 つだけではない。

6 と 8 の公倍数には、

$$24, 48, 72, \dots$$

がある。

「最初に」「次に」と問われているなら、その中で最も小さい正の公倍数を選ぶ必要がある。

同じ組数に分けるときは公約数

個数を同じ数の組に分ける

赤いカード 84 枚と青いカード 60 枚を、どちらも余りが出ないように同じ組数に分けるとする。

組数を d とすると、84 も 60 も d で割り切れる必要がある。

したがって、 d は 84 と 60 の公約数である。

さらに、できるだけ多くの組に分けるなら、 d は最大公約数になる。

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

なので、最大公約数は、

$$2^2 \cdot 3 = 12$$

である。

したがって、最大 12 組に分けられる。

最大に分けるなら最大公約数

2 種類以上の個数を、

- どれも余りなく
- 同じ組数に
- できるだけ多く

分ける問題では、組数は最大公約数になる。

等間隔に区切る問題

できるだけ長い同じ長さに切る

長さ 72 cm と 48 cm の 2 本のひもを、余りが出ないように同じ長さずつ切る。

1 本の長さを d cm とすると、72 も 48 も d で割り切れる必要がある。

したがって、 d は 72 と 48 の公約数である。

さらに「できるだけ長く」とあるので、最大公約数を求める。

72 と 48 の最大公約数は 24 である。

したがって、1 本 24 cm ずつに切ることができる。

最大の同じ間隔も最大公約数

長さや個数を同じ大きさに区切る問題で、

余りなく、できるだけ大きく

とある場合は、最大公約数を利用する。

余りの条件を式にする

5 で割ると 2 余る

正の整数 n を 5 で割ると 2 余るとする。

このとき、商を整数 q とすれば、

$$n = 5q + 2$$

と表せる。

たとえば、

$$7 = 5 \cdot 1 + 2$$

$$12 = 5 \cdot 2 + 2$$

$$17 = 5 \cdot 3 + 2$$

なので、5 で割ると 2 余る正の整数は、

$$2, 7, 12, 17, 22, \dots$$

と続く。

余り条件の表し方

整数 n を正の整数 a で割ると r 余るとき、ある整数 q を用いて、

$$n = aq + r$$

と表せる。

余りは、

$$0 \leq r < a$$

を満たす。

余りは割る数より小さい

「5 で割ると 7 余る」という表現は、通常の割り算の余りとしては使わない。

7 は 5 より大きいためである。

余りは必ず 0 以上で、割る数より小さい。

同じ余りが出る条件

5 でも 7 でも 2 余る

2 より大きい正の整数 n を 5 で割っても 7 で割っても 2 余るとする。

2 を引くと、

$$n - 2$$

は 5 でも 7 でも割り切れる。

したがって、 $n - 2$ は 5 と 7 の公倍数である。

5 と 7 の最小公倍数は 35 なので、

$$n - 2 = 35, 70, 105, \dots$$

と考えられる。

したがって、

$$n = 37, 72, 107, \dots$$

となる。

「2 より大きい最小の正の整数」を求めるなら 37 である。

同じ余りなら、その余りを引く

整数 n を複数の数で割ったときに同じ余り r が出るなら、

$$n - r$$

に注目する。

$n - r$ は、それらの割る数の公倍数になる。

条件を式に直してから解く

文章題をすぐ計算しない

整数の文章題では、いきなり最大公約数や最小公倍数を計算するのではなく、何が公約数・公倍数になるのかを確認する必要がある。

たとえば、

「18 分ごとの作業と 24 分ごとの作業が、次に同時に始まるのはいつか」

なら、求める時間は 18 と 24 の**最小公倍数**である。

一方、

「18 個と 24 個の品物を、どちらも余らないようにできるだけ多くの同じ組に分ける」

なら、求める組数は 18 と 24 の**最大公約数**である。

同じ 18 と 24 が登場しても、文章の意味によって使う考え方は異なる。

最小公倍数か最大公約数が

次の言葉を判断の入口にするとよい。

問題の特徴	考えるもの
周期が再び重なる	最小公倍数
最初に同時になる	最小公倍数
同じ組数に余りなく分ける	公約数
できるだけ多くの組に分ける	最大公約数
同じ長さに余りなく切る	公約数
できるだけ長く切る	最大公約数
割ると同じ余りが出る	余りを引いて公倍数を考える

例題

例題 1

あるランプ A は 8 分ごと、ランプ B は 12 分ごとに点灯する。

今、2 つのランプが同時に点灯した。次に同時に点灯するのは何分後か。

例題 1 の解答・解説

ランプ A が点灯する時刻は 8 の倍数、ランプ B が点灯する時刻は 12 の倍数として考えられる。
次に同時に点灯する時刻は、8 と 12 の最小公倍数である。

$$8 = 2^3$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

なので、最小公倍数は、

$$2^3 \cdot 3 = 24$$

である。

したがって、24 分後に再び同時に点灯する。

例題 2

りんご 72 個とみかん 48 個を、どの組も同じ内容になるように、すべて使ってできるだけ多くの組に分ける。

何組に分けられるか。また、1 組にはりんごとみかんがそれぞれ何個入るか。

例題 2 の解答・解説

組数は 72 と 48 の両方を割り切る必要がある。

さらに、できるだけ多くの組に分けるので、組数は 72 と 48 の最大公約数である。

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$48 = 2^4 \cdot 3$$

なので、最大公約数は、

$$2^3 \cdot 3 = 24$$

である。

したがって、24 組に分けられる。

1 組あたりのりんごは、

$$72 \div 24 = 3$$

個である。

1 組あたりのみかんは、

$$48 \div 24 = 2$$

個である。

よって、24 組に分け、1 組にはりんご 3 個、みかん 2 個を入れる。

例題 3

正の整数 n を 6 で割っても 8 で割っても 3 余る。

このような n のうち、3 より大きい最小のものを求めよ。

例題 3 の解答・解説

n を 6 で割っても 8 で割っても 3 余るので、

$$n - 3$$

は 6 と 8 の両方の倍数である。

したがって、 $n - 3$ は 6 と 8 の公倍数である。

3 より大きい最小の n を求めるので、 $n - 3$ は 6 と 8 の最小公倍数を考えればよい。

6 と 8 の最小公倍数は 24 なので、

$$n - 3 = 24$$

である。

したがって、

$$n = 27$$

である。

実際、27 を 6 で割ると 3 余り、8 で割っても 3 余る。

演習問題

練習問題 1

ある音 A は 6 秒ごと、音 B は 15 秒ごとに鳴る。

今、2 つの音が同時に鳴った。次に同時に鳴るのは何秒後か。

練習問題 2

赤い紙 45 枚と青い紙 30 枚を、すべて使って同じ内容の組をできるだけ多く作る。
何組作れるか。また、1 組に赤い紙と青い紙がそれぞれ何枚入るか。

練習問題 3

長さ 84 cm と 60 cm の 2 本のひもを、どちらも余りが出ないように同じ長さに切る。
1 本をできるだけ長くするとき、その長さを求めよ。

練習問題 4

正の整数 n を 7 で割ると 4 余る。
 n を、整数 q を用いた式で表せ。

練習問題 5

正の整数 n を 4 で割っても 6 で割っても 1 余る。
 $n > 1$ を満たす最小の n を求めよ。

練習問題 6

ある作業 A は 18 分ごと、作業 B は 30 分ごとに開始する。
午前 9 時に 2 つの作業が同時に始まった。次に同時に始まるのは午前何時何分か。

練習問題 7

クッキー 56 枚とキャンディー 42 個を、どの袋も同じ内容になるように、すべて使ってできるだけ多くの袋に分ける。
袋の数と、1 袋あたりのクッキーとキャンディーの数を求めよ。

練習問題 8

ある生徒は、「10 分ごとの合図と 15 分ごとの合図が次に同時になる時刻」を求めるために、10 と 15 の最大公約数を計算した。
考え方の誤りを説明し、正しい時間を求めよ。

練習問題 9

正の整数 n を 8 で割っても 12 で割っても 5 余る。
このような n のうち、5 より大きいものを小さい順に 3 個求めよ。

演習問題の解答・解説

練習問題 1 の解答・解説

次に 2 つの音が同時に鳴る時間は、6 と 15 の最小公倍数である。

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

なので、最小公倍数は、

$$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

である。

したがって、30 秒後に再び同時に鳴る。

練習問題 2 の解答・解説

組数は 45 と 30 の公約数であり、できるだけ多くするので最大公約数を求める。

$$45 = 3^2 \cdot 5$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

なので、最大公約数は、

$$3 \cdot 5 = 15$$

である。

したがって、15 組作れる。

1 組あたりの赤い紙は、

$$45 \div 15 = 3$$

枚である。

青い紙は、

$$30 \div 15 = 2$$

枚である。

よって、15 組作り、1 組には赤い紙 3 枚、青い紙 2 枚を入れる。

練習問題 3 の解答・解説

切る長さは 84 と 60 の両方を割り切る必要がある。

さらに、できるだけ長くするので、84 と 60 の最大公約数を求める。

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

なので、最大公約数は、

$$2^2 \cdot 3 = 12$$

である。

したがって、1 本 12 cm に切ればよい。

練習問題 4 の解答・解説

n を 7 で割ると 4 余るので、ある整数 q を用いて、

$$n = 7q + 4$$

と表せる。

練習問題 5 の解答・解説

n を 4 で割っても 6 で割っても 1 余るので、

$$n - 1$$

は 4 と 6 の両方の倍数である。

$n > 1$ を満たす最小の n を求めるので、 $n - 1$ は 4 と 6 の最小公倍数とすればよい。

4 と 6 の最小公倍数は 12 なので、

$$n - 1 = 12$$

である。

したがって、

$$n = 13$$

である。

練習問題 6 の解答・解説

2 つの作業が次に同時に始まるまでの時間は、18 と 30 の最小公倍数である。

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

なので、最小公倍数は、

$$2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$$

である。

90 分は 1 時間 30 分である。

午前 9 時の 1 時間 30 分後なので、次に同時に始まるのは午前 10 時 30 分である。

練習問題 7 の解答・解説

袋の数は 56 と 42 の両方を割り切る必要がある。

できるだけ多くの袋に分けるので、56 と 42 の最大公約数を求める。

$$56 = 2^3 \cdot 7$$

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

なので、最大公約数は、

$$2 \cdot 7 = 14$$

である。

したがって、14 袋に分けられる。

1 袋あたりのクッキーは、

$$56 \div 14 = 4$$

枚である。

キャンディーは、

$$42 \div 14 = 3$$

個である。

よって、14 袋に分け、1 袋にはクッキー 4 枚、キャンディー 3 個を入れる。

練習問題 8 の解答・解説

求めるのは、10 分ごとの時刻と 15 分ごとの時刻が次に共通する時間である。
したがって、使うのは最大公約数ではなく最小公倍数である。

$$10 = 2 \cdot 5$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

なので、最小公倍数は、

$$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

である。

したがって、次に同時になるのは 30 分後である。

練習問題 9 の解答・解説

n を 8 で割っても 12 で割っても 5 余るので、

$$n - 5$$

は 8 と 12 の両方の倍数である。

8 と 12 の最小公倍数は 24 である。

したがって、

$$n - 5 = 24, 48, 72, \dots$$

と考えられる。

それぞれ 5 を加えると、

$$n = 29, 53, 77, \dots$$

となる。

よって、小さい順に 3 個は、

$$29, 53, 77$$

である。