第 217 講 立体の体積

学習目標

- 立体を切る向きと区間を読み取り、位置xでの断面積を$A(x)$で表せる。
- 薄片の体積$A(x)\Delta x$の和から、$V=\int_a^b A(x)\,dx$を説明できる。
- 正方形、長方形、三角形、正三角形、半円の断面から$A(x)$を作れる。
- 座標不等式で定まる四面体やくさび形の立体を、三角形や台形の断面へ翻訳できる。
- 各位置の断面積が一致することが等体積の十分条件であり、その逆は成り立たないことを説明できる。

断面積による体積

立体全体が平面$x=a$と$x=b$の間にあるとする。各$x\in[a,b]$で、x軸に垂直な平面による断面積を$A(x)$とする。$A(x)$が区間$[a,b]$で連続な非負関数なら、立体の体積Vは次の公式で与えられる。

$$V=\int_a^b A(x)\,dx$$

本講では、連続性と非負性を、この公式を安全に使うための十分条件とする。

断面積を薄片として積み重ねる

区間$[a,b]$を細かく分ける。幅Δxの小区間では断面積の変化が小さいため、その部分を断面積$A(x)$、厚さΔxの薄片とみなせる。薄片の体積はおよそ$A(x)\Delta x$である。すべての薄片を加え、Δxを 0 へ近づけた極限が$\int_a^b A(x)\,dx$となる。

積み重ねているのは「断面積×厚さ」である。一辺や高さなどの長さだけを積分しても、体積にはならない。

2 つの立体が同じ平面$x=a,b$の間にあり、同じ向きに切った断面積を$A_1(x),A_2(x)$とする。A_1,A_2が連続で、すべての$x\in[a,b]$に対して$A_1(x)=A_2(x)$なら、2 つの積分について次式が成り立つ。

$$\int_a^b A_1(x)\,dx=\int_a^b A_2(x)\,dx$$

したがって、2 立体の体積は等しい。各位置で断面積が等しいことは、等体積であるための十分条件である。ただし、積分値が等しくても 2 つの関数が同じとは限らないため、必要条件ではない。

©ミライコーチング

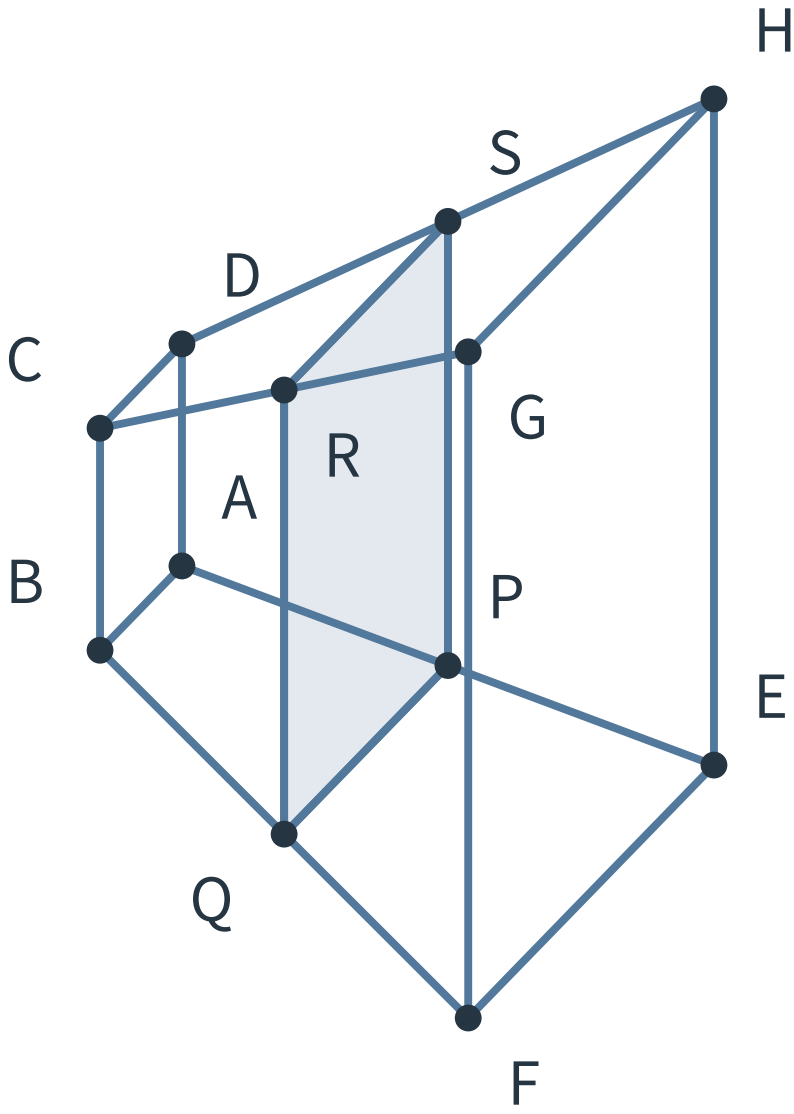

図 1　位置xで切った正方形の断面を積み重ねて体積を作る模式図

この図は、すべての外形線を実線で表したワイヤーフレームの模式図である。正射影で描かれているため、図上の投影長を測って一辺の長さを決めてはならない。各断面の長さは、問題文や式から求める。

断面積から体積を求める手順

1. どの向きに切るかを決める。
2. 立体が存在する区間$[a, b]$を決める。
3. 位置xでの断面の形を読み取り、面積に必要な長さを求める。
4. 断面積$A(x)$を作り、区間全体で$A(x) \geq 0$であることを確かめる。
5. $V = \int_a^b A(x)\,dx$を計算し、体積を立方単位で答える。

長さ・符号・単位・端点を確認する

断面の一辺、底辺、高さをそのまま積分するのではなく、それらから断面積を作って積分する。
正方形の一辺や円の半径など、長さを表す式は考えている区間で非負でなければならない。
断面積の単位が長さの 2 乗、厚さの単位が長さであるため、体積の単位は長さの 3 乗となる。数値だけでなく、必要に応じて立方単位まで確かめる。
区間の端点で断面積が 0 になってもよい。そのときの正方形、三角形、半円、台形は、点または線分へ退化した断面として扱える。

例題

例題 1：変化する正方形断面

立体Sは平面$x = 0$と$x = 2$の間にある。$0 \leq x \leq 2$において、x軸に垂直な平面でSを切った断面は、一辺の長さが$x + 1$である正方形である。Sの体積を求めよ。

例題 1 の解答・解説

位置xでの断面は一辺$x + 1$の正方形なので、断面積は次式で表される。

$$A(x) = (x + 1)^2$$

立体全体は$0 \leq x \leq 2$にあるから、体積は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 (x + 1)^2\,dx \\ &= \int_0^2 \left(x^2 + 2x + 1\right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} + 4 + 2 \\ &= \frac{26}{3} \end{aligned}$$

したがって、体積は$\frac{26}{3}$である。問題文は全区間で断面の形と一辺を与えており、$A(x) = (x + 1)^2$は連続かつ非負であるため、断面積の積分を用いる条件を満たしている。

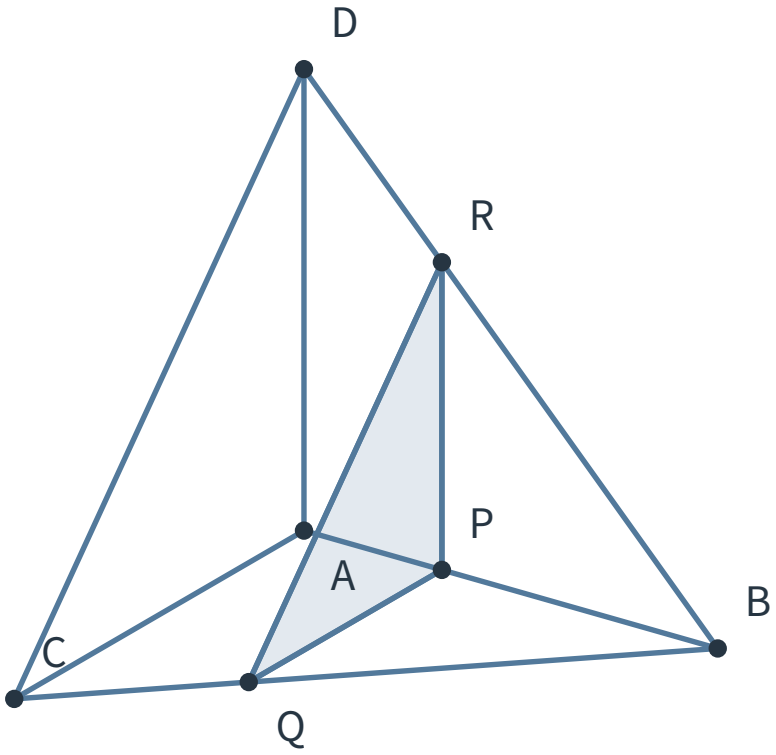

図 2　平面$x=1$で切った断面PQRは脚の長さ 2 の直角二等辺三角形である

この図も、すべての辺を実線で表したワイヤーフレームの模式図である。正射影による図上の投影長を測るのではなく、不等式から断面の脚の長さを求める。

例題 2：座標不等式で定まる四面体

次の不等式で表される立体Tの体積を求めよ。

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0, \qquad z \geq 0, \qquad x+y+z \leq 3$$

ただし、x軸に垂直な平面で切った断面を用いるものとする。

例題 2 の解答・解説

不等式からxの範囲は$0 \leq x \leq 3$である。xを固定すると、yz平面に平行な断面は次の不等式で表される。

$$y \geq 0, \qquad z \geq 0, \qquad y+z \leq 3-x$$

この断面は、y方向とz方向の脚がともに$3-x$である直角二等辺三角形である。したがって、断面積は次式となる：

$$A(x)=\frac{1}{2}(3-x)^2$$

体積は次のように計算できる。

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{2}\int_0^3 (3-x)^2\,dx\\&=\frac{1}{2}\left[-\frac{(3-x)^3}{3}\right]_0^3\\&=\frac{1}{2}\cdot 9\\&=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

したがって、体積は$\frac{9}{2}$である。4 本の不等式が立体を一意に定め、各$x\in[0,3]$の断面は有限な三角形となる。$A(x)=\frac{1}{2}(3-x)^2$は連続かつ非負であり、$x=3$では点へ退化するため、端点も含めて体積公式を適用できる。

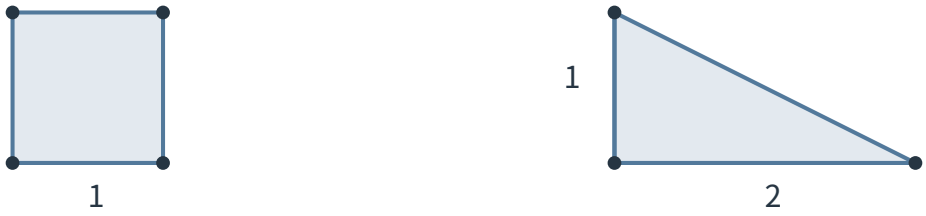

図 3　位置$x=0$では左のPの正方形断面と右のQの直角三角形断面の面積はともに 1 である

例題 3：形が違っても断面積が等しい 2 立体

立体P,Qはいずれも平面$x=0$と$x=2$の間にある。位置xでx軸に垂直に切ったとき、Pの断面は一辺$\sqrt{x+1}$の正方形、Qの断面は底辺 2、高さ$x+1$の直角三角形である。P,Qの体積が等しいことを示し、その共通の体積を求めよ。

例題 3 の解答・解説

Pの断面積は次式で表される。

$$A_P(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = x+1$$

一方、Qの断面積は次式で表される。

$$A_Q(x) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot (x+1) = x+1$$

したがって、すべての$x \in [0,2]$で$A_P(x) = A_Q(x)$が成り立つ。共通の体積は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} V_P = V_Q &= \int_0^2 (x+1)\,dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

断面の形は異なるが、同じ区間で同じ向きに切った各位置の断面積が一致するため、両立体の体積は等しい。したがって、共通の体積は4である。

演習問題

演習 1：一定の長方形断面

立体Sは平面$x=-1$と$x=3$の間にある。各位置xでx軸に垂直に切った断面は、辺の長さが 2 と 3 の長方形である。Sの体積を求めよ。

演習 2：縮小する正方形断面

立体Sは$0 \le x \le 3$にあり、x軸に垂直な断面は一辺$3-x$の正方形である。Sの体積を求めよ。

演習 3：正三角形断面

立体Sは$0 \le x \le 3$にあり、x軸に垂直な断面は一辺xの正三角形である。Sの体積を求めよ。

演習 4：半円断面

立体Sは$-2 \le x \le 2$にあり、x軸に垂直な断面は、直径が$2\sqrt{4-x^2}$である半円である。Sの体積を求めよ。

演習 5：切片の異なる四面体

次の不等式で表される立体Tの体積を、x軸に垂直な断面を用いて求めよ。

$$x \ge 0, \qquad y \ge 0, \qquad z \ge 0, \qquad \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3} \le 1$$

©ミライコーチング

演習 6：体積から断面の係数を決める

実数aに対し、立体Sは$0 \le x \le 1$にあり、x軸に垂直な断面は一辺$ax+1$の正方形であるとする。$ax+1$は区間$[0,1]$のすべてのxで正である。
(1) Sの体積Vをaで表せ。
(2) $V = \frac{7}{3}$であるとき、aを求めよ。

演習 7：台形断面を読み取る

次の不等式で表される立体Sの体積を、x軸に垂直な断面を用いて求めよ。

$$0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 1-x, \qquad 0 \le z \le x+y$$

演習 8：等断面積は十分条件か

同じ平面$x=0$と$x=1$の間にある 2 つの立体S_1, S_2について、位置xでx軸に垂直に切った断面積をそれぞれ$A_1(x), A_2(x)$とする。A_1, A_2は区間$[0,1]$で連続かつ非負である。
(1) すべての$x \in [0,1]$で$A_1(x) = A_2(x)$なら、S_1, S_2の体積が等しいことを示せ。
(2) S_1, S_2の体積が等しければ、すべての$x \in [0,1]$で$A_1(x) = A_2(x)$であるといえるか。$A_1(x) = 1$、$A_2(x) = 2x$を用いて答えよ。

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

断面積はすべての$x \in [-1,3]$で$A(x) = 2 \cdot 3 = 6$である。体積は次のように計算できる。

$$V = \int_{-1}^{3} 6\,dx = 6\{3-(-1)\} = 24$$

よって、体積は24である。断面積が区間全体で一定の非負関数として与えられ、区間が立体全体を覆っているため、断面積の積分を用いる条件を満たす。

演習 2 の解答・解説

$0 \le x \le 3$では$3-x \ge 0$である。断面積は$A(x) = (3-x)^2$なので、体積は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} V &= \int_{0}^{3} (3-x)^2\,dx \\ &= \left[-\frac{(3-x)^3}{3}\right]_{0}^{3} \\ &= 9 \end{aligned}$$

したがって、体積は9である。一辺$3-x$は区間全体で非負であり、断面積は連続なので、端点$x=3$で正方形が点へ退化しても問題はない。

演習 3 の解答・解説

一辺sの正三角形の面積は$\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$である。したがって、位置xでの断面積は次式で表される。

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

体積は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^3 x^2\,dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

一辺xは区間全体で非負であり、$A(x)$は連続である。したがって、体積は$\frac{9\sqrt{3}}{4}$である。

演習 4 の解答・解説

半円の半径は$\sqrt{4-x^2}$である。したがって、断面積は次式で表される。

$$A(x) = \frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}(4-x^2)$$

体積は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx \\ &= \frac{\pi}{2}\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{32}{3} \\ &= \frac{16\pi}{3} \end{aligned}$$

$-2 \le x \le 2$では$4-x^2 \ge 0$なので、直径は実数かつ非負であり、半円断面は問題文によって各位置で直接定まる。したがって、体積は$\frac{16\pi}{3}$である。

演習 5 の解答・解説

xの範囲は$0 \le x \le 4$である。xを固定すると、断面はyz平面に平行な直角三角形である。y軸方向とz軸方向の切片は、それぞれ次のようになる。

$$2\left(1-\frac{x}{4}\right), \qquad 3\left(1-\frac{x}{4}\right)$$

これらの切片を使うと、断面積は次式で表される：

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\left(1 - \frac{x}{4}\right) \cdot 3\left(1 - \frac{x}{4}\right)$$
$$= 3\left(1 - \frac{x}{4}\right)^2$$

体積は次のように計算できる。

$$V = 3\int_0^4 \left(1 - \frac{x}{4}\right)^2 dx$$
$$= 3\left[x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{48}\right]_0^4$$
$$= 3\left(4 - 4 + \frac{4}{3}\right)$$
$$= 4$$

不等式は第 1 八分体内の有界な四面体を一意に定め、2 つの切片は$0 \leq x \leq 4$で非負である。したがって、体積は4である。

演習 6 の解答・解説

断面積は$A(x) = (ax+1)^2$である。体積は次のように計算できる。

$$V = \int_0^1 (ax+1)^2\, dx$$
$$= \int_0^1 (a^2x^2 + 2ax + 1)\, dx$$
$$= \frac{a^2}{3} + a + 1$$

(1)の答えは$V = \frac{a^2}{3} + a + 1$である。
(2) 体積の条件$V = \frac{7}{3}$を代入すると、次の方程式を得る。

$$\frac{a^2}{3} + a + 1 = \frac{7}{3}$$

両辺を 3 倍して整理した式は次の通りである。

$$a^2 + 3a - 4 = 0$$

左辺を因数分解すると、次式を得る。

$$(a-1)(a+4) = 0$$

したがって、$a = 1, -4$を得る。ただし、$a = -4$では$x = 1$のとき$ax + 1 = -3$となり、一辺が正であるという条件に反する。$a = 1$では$x + 1 > 0$が区間全体で成り立つ。体積方程式と長さの条件を合わせると候補は 1 つに定まるため、(2)の答えは$a = 1$である。

演習 7 の解答・解説

xを固定すると、yz平面に平行な断面は$0 \le y \le 1-x$、$0 \le z \le x+y$で表される。yz平面上で頂点を(y,z)の順に書くと、断面の頂点は次の 4 点である。

$$(0,0), \qquad (1-x,0), \qquad (1-x,1), \qquad (0,x)$$

$y=0$でのz方向の長さはx、$y=1-x$での長さは 1 であり、2 本の平行な辺の間隔は$1-x$である。したがって、断面は平行な 2 辺の長さが$x, 1$である台形であり、その面積は次式で表される。

$$A(x) = \frac{x+1}{2}(1-x) = \frac{1-x^2}{2}$$

体積は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3 本の不等式が各xの有限な台形断面を一意に定め、$0 \le x \le 1$で$A(x) \ge 0$である。したがって、体積は$\frac{1}{3}$である。

演習 8 の解答・解説

(1) 仮定より、区間全体で$A_1(x) = A_2(x)$である。等しい関数の定積分は等しいため、次式が成り立つ。

$$V_1 = \int_0^1 A_1(x)\,dx = \int_0^1 A_2(x)\,dx = V_2$$

したがって、2 立体の体積は等しい。
(2) $A_1(x) = 1$と$A_2(x) = 2x$は、例えば$x = 0$で$A_1(0) = 1$、$A_2(0) = 0$となるため、同一の関数ではない。一方、A_1の積分は次のようになる。

$$\int_0^1 A_1(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$$

A_2についても、積分は次のようになる。

$$\int_0^1 A_2(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx = 1$$

A_1, A_2はいずれも区間$[0,1]$で連続かつ非負である。2 つの積分はともに 1 であるため体積は等しいが、各位置の断面積が等しいとは限らない。
さらに、各位置xで一辺$\sqrt{A_i(x)}$の正方形を断面に取れば、$A_i(x)$を断面積とする立体を実現できる。よって、この 2 関数は実際の立体の断面積として用いることができる。以上より、各位置で断面積が等しいことは等体積の十分条件であるが、必要条件ではなく、その逆は成り立たない。