

第 168 講 結果を現実に戻して検討する

学習目標

この講では、数学的モデルから得た数値をそのまま信じるのではなく、対象の意味や目的に戻して検討できることを目標とする。

具体的には、次のことができるようになる。

- ・モデル値と確認値の差を、同じ単位にそろえて比較できる。
- ・指定した確認点で、事前に決めた基準を満たすか判断できる。
- ・数式上計算できる値でも、現実の対象に合わない場合があることを説明できる。

モデルの結果を現実へ戻す考え方

本講で扱うモデルと確認記録は、すべて学習用に作った架空例であり、実測資料ではない。

数学的モデルは、現実の変化や関係を数式で表したものである。しかし、モデルから得られた数値が計算できたからといって、その値が必ず現実で意味を持つとは限らない。

そこで、モデルの作成に使った記録とは別の確認記録を用いて、予測した値と確認した値を比較する。

比較するときは、まず同じ単位にそろえる。確認値の数値を u 、モデル値の数値を v とすると、差を $e = u - v$ と定める。差の符号を見ると、確認値がモデル値より大きいかわかりやすい。また、ずれの大きさは $|e|$ で調べる。

許容できるずれの大きさは、利用目的によって変わる。そのため、基準は比較する前に決めておく。ここでの基準は、指定した目的に対する判断基準であり、統計的な信頼度や因果関係を示すものではない。

有限個の確認点で基準を満たしたとしても、それは確認した条件と記録についての判断である。区間全体の正しさや未来の結果を保証するものではない。

また、モデルと確認記録のずれの原因を測定誤差だけに決めることはできない。モデルの作り方、対象の変化、条件の違いなど、複数の原因が考えられる。

確認記録にも誤差が含まれる場合があるが、この講での計算では表に示された数値をそのまま用いる。

結果を見るとき判断の流れ

1. モデル値を求める。
2. 同じ単位にそろえた確認値の数値を u 、モデル値の数値を v として、 $e = u - v$ を求める。
3. $|e|$ でずれの大きさを見る。
4. 比較前に決めた基準と比べる。
5. 確認した条件と記録に限定して結論を出す。

例題 1

架空の温度変化について、時刻 t 分後の温度 T °C を表すモデルとして $T = 10 + 2t$ がある。このモデルの作成に使わなかった新しい確認記録として、次の架空記録を得た。

時刻 t	確認温度
1	12.4
2	13.8

時刻 t	確認温度
3	16.3

今回の目的では、比較前に「各確認点で差の絶対値が 0.5°C 以内なら基準を満たす」と決めた。

(1) 確認値の数値を u 、モデル値の数値を v とし、 $e = u - v$ と $|e|$ を用いて各時刻のずれを求めなさい。

(2) 今回の 3 点が基準を満たすか判断しなさい。

(3) この結果だけから、他の時刻でも必ず正確であると言えるか答えなさい。

ただし、検討する入力は $1 \leq t \leq 3$ の実数とする。

例題 1 の解答・解説

(1) モデルは $T = 10 + 2t$ である。

各時刻でモデル値を求める。

時刻 t	モデル値	確認値	差 e	差の絶対値
1	12	12.4	0.4	0.4
2	14	13.8	-0.2	0.2
3	16	16.3	0.3	0.3

(2) 差の絶対値は $0.4, 0.2, 0.3$ であり、すべて 0.5°C 以内である。

したがって、今回確認した 3 点では基準を満たす。

(3) この結果は、確認した 3 点についての判断である。この 3 点だけから、他の時刻でも必ず正確であることや未来の温度を保証することはできない。

例題 2

ある作業件数から必要時間を予測する 2 つの固定モデル A、B がある。

作業件数を n 、所要時間を分単位の数値 y とする。 n は $1 \leq n \leq 3$ の整数である。

モデル A : $y = 30 + 2n$

モデル B : $y = 26 + 3n$

両モデルの作成に使わなかった確認記録として、次の架空記録を得た。

作業件数 n	確認時間 (分)
1	32
2	34
3	36

確認値の分単位の数値を u 、モデル値の分単位の数値を v とし、差を $e = u - v$ とする。

比較前に「3 点すべてで差の絶対値が 1 分以内なら基準を満たす」と決めた。

(1) モデル A について、各点の e を求めなさい。

(2) モデル B について、各点の e を求めなさい。

(3) どちらのモデルが今回の確認記録と基準を満たすか判断しなさい。

例題 2 の解答・解説

(1) モデル A の値を求める。

n	確認値	モデル A の値	e
1	32	32	0

n	確認値	モデル A の値	e
2	34	34	0
3	36	36	0

(2) モデル B の値を求める。

n	確認値	モデル B の値	e
1	32	29	3
2	34	32	2
3	36	35	1

(3) モデル A は差の絶対値がすべて 0 であり、基準を満たす。

モデル B は差の絶対値が 3, 2, 1 となり、最初の 2 点で基準を超える。

したがって、今回の記録と基準ではモデル A が基準を満たす。ただし、モデル A が未来も含めた真の法則であると証明されたわけではない。

例題 3

ある容器に残る質量 W kg を時刻 t 分で表す候補モデルとして $W = 20 - 3t$ がある。

もとの架空記録では、0 分、2 分、4 分で残った質量はそれぞれ 20kg、14kg、8kg であり、この 3 点では記録と一致していた。

(1) この式を 8 分まで延長したとき、式から得られる質量を求めなさい。

(2) その値を、容器に残る質量という意味から実際の値として採用できるか判断しなさい。

(3) $20 - 3t \geq 0$ から得られる条件を求め、その条件だけでモデルの妥当性が証明されたと言えるか答えなさい。

ただし、 t は 0 以上の実数とする。

例題 3 の解答・解説

(1) 候補モデルは $W = 20 - 3t$ である。

$t = 8$ を代入すると、 $W = 20 - 3 \times 8 = -4$ となる。

したがって、式をそのまま延長すると -4 kg という値が得られる。

(2) 容器に残る質量は負になることはないため、 -4 kg を実際の残量として採用することはできない。

ただし、負の値を自動的に 0 に変更すれば正しいと決めることはできない。空になる過程や排出が止まる条件などを確認し、モデルを見直す必要がある。

(3) 残量が負にならないためには、 $20 - 3t \geq 0$ である必要がある。

$3t \leq 20$ より、 $t \leq \frac{20}{3}$ である。

また、 t は 0 以上の実数なので、非負性の必要条件は $0 \leq t \leq \frac{20}{3}$ となる。

しかし、この条件を満たすだけで現実の対象に対するモデルの妥当性が証明されたわけではない。

非負になる条件と、現実で適用できることは別に判断する必要がある。

演習問題

練習問題 1

ある温度変化を表すモデルとして、時刻 t 分後の温度 T °C を $T = 15 + 3t$ とする。ここで t は $1 \leq t \leq 2$ の実数である。

このモデルの作成に使わなかった確認記録として、次の架空記録を得た。

時刻 t	確認温度
1	17.5
2	21.2

比較前に「差の絶対値が $0.5\text{ }^{\circ}\text{C}$ 以内なら目的に利用できる」と決めた。

- (1) 確認値を u 、モデル値を v 、差を e とするとき、 e と $|e|$ を用いて各時刻のずれを求めなさい。
- (2) 各確認点について基準を満たすか判断しなさい。

練習問題 2

ある作業人数から必要時間を予測するモデルとして、人数 n 人のとき必要時間 y 分を

$$y = 40 + 5n$$

とする。 n は $1 \leq n \leq 4$ の整数である。

このモデルの作成に使わなかった確認記録として、次の架空記録を得た。

人数 n	確認時間 (分)
1	45
2	51
3	54
4	63

確認値の分単位の数値を u 、モデル値の分単位の数値を v とし、差を $e = u - v$ とする。

比較前に「差の絶対値が 2 分以内なら今回の目的に利用できる」と決めた。

- (1) 各確認点で差 e を求めなさい。
- (2) 基準を満たさない確認点を見つけなさい。
- (3) 今回の 4 点について、このモデルが基準を満たすと言えるか判断しなさい。

練習問題 3

ある移動距離のモデルとして、時間 t 秒後の距離 d m を $d = 4t$ とする。ここで t は $2 \leq t \leq 3$ の実数である。

このモデルは距離を表す学習用のモデルである。

このモデルの作成に使わなかった確認記録として、次の架空記録を得た。

時間 t	確認距離
2	8.5
3	12.0

比較前に「差の絶対値が 0.5 m 以内なら基準を満たす」と決めた。

- (1) 確認値の m 単位の数値を u 、モデル値の m 単位の数値を v とする。差を $e = u - v$ 、ずれの大きさを $|e|$ として各確認点を調べる。
- (2) $|e| = 0.5$ となる場合を基準内としてよいか判断しなさい。
- (3) 今回の記録について判断を述べなさい。

練習問題 4

ある長さの予測モデルとして、回数 n 回のときの長さ L cm 単位の数値を $L = 250 + 10n$ とする。ここで n は 1, 2 の整数である。

このモデルの作成に使わなかった確認記録として、次の架空記録を得た。

回数 n	確認した長さ
1	260.5 cm
2	2.71 m

比較前に「差の絶対値が 1 cm 以内なら基準を満たす」と決めた。

- (1) 確認値の単位をそろえてから、各確認点の差を求めなさい。
- (2) 各確認点が基準内か判断しなさい。

練習問題 5

ある水槽に残る水量 W L を時刻 t 分で表す候補モデルとして、 $W = 50 - 8t$ がある。

この式は、 $t \geq 0$ の実数について形式的に延長した場合の値を確認するための候補モデルである。

このモデルの作成に使わなかった確認記録として、次の架空記録を得た。

時刻 t	確認した水量
5	10
8	0

- (1) モデルから $t = 8$ のときの水量を計算しなさい。
- (2) 計算結果を実際の水量として採用できるか判断しなさい。
- (3) 計算結果が負になる場合、必ず 0 に置き換えた式が正しいと言えるか答えなさい。

練習問題 6

ある来場者数の予測モデルとして、日数 n 日後の人数 N 人を $N = 100 + 20n$ とする。 n は

$$1 \leq n \leq 3$$

の整数である。

このモデルの作成に使わなかった確認記録として、次の架空記録を得た。

日数 n	確認人数
1	160
2	140
3	120

確認人数の数値を u 、モデル値の数値を v とし、差を $e = u - v$ とする。

比較前に決めた確認基準は「各点の差の絶対値が 30 人以内」である。

- (1) 各点の差 e を求めなさい。
- (2) 3 点の差の平均を求めなさい。
- (3) 差の平均が 0 であっても、各点のずれが小さいと言えるか判断しなさい。

練習問題 7

ある植物の高さ h cm を日数 t 日で表すモデルとして、 $h = 5t + 10$ がある。
このモデルの作成に使わなかった確認記録として、次の架空記録を得た。

日数 t	確認した高さ
4	30

- (1) この確認点でモデル値と確認値が一致することを示しなさい。
- (2) この 1 点の一致だけから、すべての日数でモデルが正しいと言えるか判断しなさい。
- (3) 適切な結論の範囲を文章で述べなさい。

練習問題 8

ある商品の販売数を予測するモデルとして、日数 n 日後の販売数 S 個を $S = 80 - 5n$ とする。 n は $1 \leq n \leq 2$ の整数である。
このモデルの作成に使わなかった確認記録として、次の架空記録を得た。

日数 n	確認販売数
1	75
2	66

- 確認販売数の数値を u 、モデル値の数値を v とし、差を $e = u - v$ とする。
比較前に「差の絶対値が 3 個以内なら基準を満たす」と決めていた。
確認後、担当者が「結果に合うように、基準を 5 個以内へ変更しよう」と提案した。
- (1) 元の基準で各確認点が基準内か判断しなさい。
 - (2) 確認後に基準を変更して判断することが適切か答えなさい。
 - (3) 適切な判断の仕方を説明しなさい。

練習問題 1 の解答・解説

モデル値を求め、確認値との差を調べる。

- (1) $t = 1$ のとき、モデル値は $15 + 3 = 18$ である。
したがって、 $e = u - v = 17.5 - 18 = -0.5$ 、 $|e| = 0.5$ である。
 $t = 2$ のとき、モデル値は $15 + 6 = 21$ である。
したがって、 $e = u - v = 21.2 - 21 = 0.2$ 、 $|e| = 0.2$ である。
- (2) 基準は $|e| \leq 0.5$ である。
2 点とも差の絶対値が 0.5 以下なので、今回の確認点では基準を満たす。

練習問題 2 の解答・解説

- (1) モデル値を求め、確認値との差 $e = u - v$ を計算する。

人数 n	確認値 u	モデル値 v	e
1	45	45	0
2	51	50	1
3	54	55	-1
4	63	60	3

- (2) 差の絶対値は 0, 1, 1, 3 である。
基準は差の絶対値が 2 分以内であるため、 $n = 4$ の確認点だけが基準を超えている。

(3) 4 点すべてで基準を満たす必要があるため、今回の確認記録について、このモデルが基準を満たすとは言えない。

ただし、この判断は今回指定した 4 点と基準に対するものであり、モデルそのものが必ず無意味であると決めるものではない。

練習問題 3 の解答・解説

(1) $t = 2$ のとき、モデル値は $4 \times 2 = 8$ である。

したがって、 $e = 8.5 - 8 = 0.5$ 、 $|e| = 0.5$ である。

$t = 3$ のとき、モデル値は $4 \times 3 = 12$ である。

したがって、 $e = 12.0 - 12 = 0$ 、 $|e| = 0$ である。

(2) 基準は差の絶対値が 0.5 m 以内である。

$|e| = 0.5$ は基準の範囲に含まれるため、基準内である。

(3) 2 つの確認点では、どちらも基準を満たす。

練習問題 4 の解答・解説

(1) 単位を cm にそろえる。

$n = 1$ のモデル値は $250 + 10 = 260$ cm である。

確認値は 260.5 cm なので、 $e = 260.5 - 260 = 0.5$ cm となる。

$n = 2$ のモデル値は $250 + 20 = 270$ cm である。

確認値の 2.71 m は 271 cm である。

したがって、 $e = 271 - 270 = 1$ cm となる。

(2) 差の絶対値は 0.5 cm と 1 cm である。

基準は 1 cm 以内なので、どちらも基準内である。

単位が違うまま比較すると誤った判断になるため、同じ単位へそろえる必要がある。

練習問題 5 の解答・解説

(1) $t = 8$ を代入すると、

$W = 50 - 8 \times 8 = 50 - 64 = -14$ となる。

(2) 水槽に残る水量は負になることはないため、 -14 L を実際の残量として採用することはできない。

また、8 分で確認された水量は 0 L であり、モデルを形式的に延長した値 -14 L とは一致していない。

(3) 負の値を自動的に 0 に変更すれば正しいと決めることはできない。

0 への変更が 1 点に合うだけでは、全域でモデルが正しいことの保証にはならない。

実際には、排水の進み方や排水が停止する条件などを確認し、モデルを見直す必要がある。

練習問題 6 の解答・解説

(1)

日数 n	確認値 u	モデル値 v	e
1	160	120	40
2	140	140	0
3	120	160	-40

(2) 3 点の差の平均は、

$$\frac{40 + 0 - 40}{3} = 0$$

である。

(3) 差の平均が 0 であっても、各点のずれが小さいとは言えない。

今回の差は 40, 0, -40 であり、1 日目と 3 日目は差の絶対値が 30 人を超えているため、事前に決めた基準では不合格である。

正の差と負の差が打ち消し合うことで平均が 0 になる場合がある。そのため、平均だけではなく、それぞれの確認点のずれを確認する必要がある。

練習問題 7 の解答・解説

(1) $t = 4$ のモデル値は、

$h = 5 \times 4 + 10 = 30$ である。

確認値も 30 cm なので、一致している。

(2) 1 点で一致しただけでは、すべての日数でモデルが正しいとは言えない。

確認していない範囲では、モデルと現実がずれる可能性がある。

(3) 「確認した日数については一致した」と判断するのが適切である。

「すべての日数で正しい」「未来も保証される」とまでは言えない。

練習問題 8 の解答・解説

(1) $n = 1$ のモデル値は $80 - 5 = 75$ である。

したがって、 $e = 75 - 75 = 0$ である。

$n = 2$ のモデル値は $80 - 10 = 70$ である。

したがって、 $e = 66 - 70 = -4$ である。

差の絶対値は 0, 4 となる。

元の基準は差の絶対値が 3 個以内なので、第 2 点は基準を満たさない。

(2) 結果に合わせて基準を緩めても、元の基準で合格したことにはならない。合格と見せるために基準を変更することは適切ではない。

ただし、目的そのものを見直し、新しい目的に合わせて別の基準を検討することまで禁止されるわけではない。その場合は、変更理由を明示し、新しい目的に適した別の確認記録で確かめる必要がある。

(3) 比較前に決めた基準でまず判断し、その結果を記録することが適切である。

今回の確認記録では、元の基準では第 2 点が不合格であることを示した上で、必要なら目的変更と基準変更の理由を明確にする。