

第 139 講 等差数列

学習目標

等差数列の意味を理解し、隣り合う項の差から公差を判断できるようになる。
初項と公差から第 n 項を求める一般項を使えるようになる。
2 つの既知の項から公差や一般項を求める考え方を身につける。

等差数列を見る視点

数列では、項がどのような規則で並んでいるかを見ることが重要である。
例えば、最初の項を 2 とし、以後は前の項に 3 を加えて続けると定めた数列を考えると、
2, 5, 8, 11, ... となる。
このような数列では、隣り合う項の差が一定になる。等差数列で注目するのは、有限個の項だけの見た目ではなく、定められた規則によって続く全ての項で隣り合う項の差が一定になるかどうかである。
等差数列では、初項から次の項へ進むたびに同じ量だけ移動する。この移動量が公差であり、一般項を考えるときの中心となる。

等差数列の定義

正の整数 n に対して、第 1 項を初項 a_1 とする数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ を考える。
隣り合う項の差がすべて同じ値になるとき、その数列を等差数列といい、その差を公差 d という。
つまり、すべての正の整数 n について $a_{n+1} - a_n = d$ が成り立つ数列が等差数列である。
公差は、隣り合う 2 項について後の項の値から前の項の値を引いた差である。
項の値や公差は実数でよく、正の数だけでなく、負の数、分数、0 も認められる。

等差数列の中心

等差数列かどうかを見るときは、項の並び方ではなく「隣り合う項の差が一定か」を確認する。
有限個の最初の値だけを見て、必ず無限に等差数列であると決めることはできない。問題文で等差数列であることが示されている場合、または全ての隣接項の差が一定であることを確認できる場合に等差数列として扱う。

一般項の理由

初項 a_1 から第 n 項 a_n まで移動する回数を考える。
第 1 項から第 2 項へ移動するのが 1 回、第 2 項から第 3 項へ移動するのがさらに 1 回であるため、第 n 項へ到達するには合計 $n - 1$ 回移動する。
1 回の移動で必ず公差 d だけ変化するため、初項に $(n - 1)$ 回分の変化を加えれば第 n 項になる。

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

この式が等差数列の一般項である。
 $n = 1$ のときは移動回数が 0 回になるため、 $a_1 = a_1 + 0d$ となり、初項の場合でも正しく成り立つ。

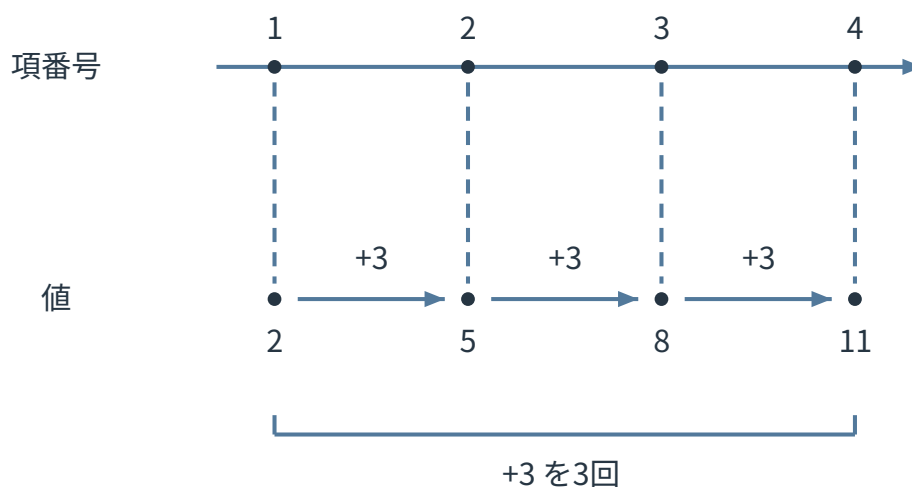


図1 上段は項番号の数直線、下段は対応する値の一覧である。初項2に公差3を足し、第1項から第4項までは3回足す。

公差による変化

公差 d の符号を見ると、数列の変化の向きを判断できる。

$d > 0$ のとき、後の項ほど大きくなるため増加する数列である。

$d = 0$ のとき、全ての項が同じ値になるため一定の数列である。

$d < 0$ のとき、後の項ほど小さくなるため減少する数列である。

ただし、数列は離散的な値の並びであり、項と項の間を連続した曲線で結んで考えるものではない。

2つの項から公差を求める

等差数列で第 p 項 a_p と第 q 項 a_q が分かっている場合を考える。

ここで p, q は異なる正整数である。

まず $q > p$ の場合、第 p 項から第 q 項までは、項番号の差である $q - p$ 回だけ前向きに公差 d を加える。

したがって、 $a_q - a_p = (q - p)d$ となる。

一般の場合でも、等差数列の一般項 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ を使えば、

$$a_q = a_1 + (q - 1)d$$

$$a_p = a_1 + (p - 1)d$$

である。

この2式を引くと、

$$\begin{aligned} a_q - a_p &= \{a_1 + (q - 1)d\} - \{a_1 + (p - 1)d\} \\ &= (q - p)d \end{aligned}$$

となる。

よって、 $p \neq q$ のとき、

$$d = \frac{a_q - a_p}{q - p}$$

で公差を求められる。

大切なのは、項の値の差だけを見るのではなく、項番号の差が何回分の変化に対応するかを考えることである。

例題 1

初項が 2、公差が 3 の等差数列について、一般項 a_n と第 10 項 a_{10} を求めよ。

例題 1 の解説

初項と公差が与えられているので、一般項の公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ を使う。

ここで $a_1 = 2$ 、 $d = 3$ であるから、

$$\begin{aligned}a_n &= 2 + (n-1)3 \\ &= 3n - 1\end{aligned}$$

となる。

第 10 項は $n = 10$ を代入して、 $a_{10} = 3 \times 10 - 1 = 29$ である。

元の条件を確認すると、第 1 項は $3 \times 1 - 1 = 2$ で初項に一致し、隣り合う項の差は常に 3 になるため、等差数列の条件を満たしている。

例題 2

等差数列において、第 3 項が -1 、第 7 項が -13 である。この数列の初項、公差、一般項を求めよ。

例題 2 の解説

第 3 項から第 7 項までは、項番号の差である $7 - 3 = 4$ 回の移動がある。

したがって、公差 d について、

$$\begin{aligned}-13 - (-1) &= 4d \\ -12 &= 4d \\ d &= -3\end{aligned}$$

となる。

次に第 3 項の値を利用する。

一般項を $a_n = a_1 + (n-1)d$ とすると、 $a_3 = a_1 + 2d$ であるから、

$$\begin{aligned}-1 &= a_1 + 2(-3) \\ a_1 &= 5\end{aligned}$$

となる。

よって一般項は、

$$\begin{aligned}a_n &= 5 + (n-1)(-3) \\ &= 8 - 3n\end{aligned}$$

である。

検算すると、 $a_3 = 8 - 9 = -1$ 、 $a_7 = 8 - 21 = -13$ となり、元の条件を満たす。

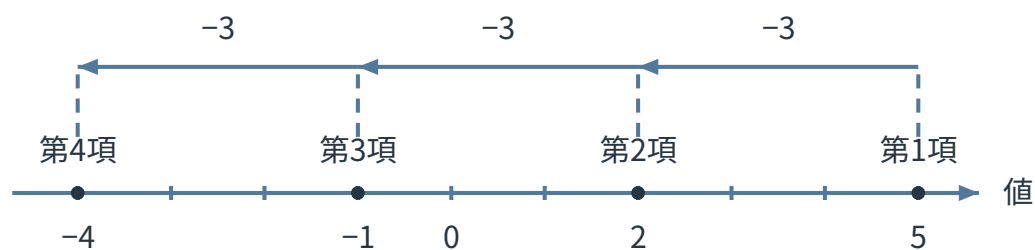


図2 値の数直線は右に増える。初項5から公差-3を足すたびに、左へ3ずつ進み、5、2、-1、-4となる。

例題3

初項が $\frac{1}{2}$ 、公差が $\frac{3}{2}$ の等差数列について、14 と 15 がこの数列の項として現れるかを調べよ。

例題3の解説

一般項を求める。

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} + (n-1)\frac{3}{2} \\ &= \frac{3n-2}{2} \end{aligned}$$

14 が項として現れるなら、ある正の整数 n が存在して、

$$\frac{3n-2}{2} = 14$$

となる。

両辺を2倍すると、 $3n-2=28$ より、 $3n=30$ 、 $n=10$ となる。

$n=10$ は正の整数なので、14 は第10項として現れる。

次に15について調べる。

$$\frac{3n-2}{2} = 15$$

より、 $3n-2=30$

したがって、

$$3n=32, \quad n=\frac{32}{3}$$

となる。

これは正の整数ではないため、15はこの数列の項として現れない。

数列の項になるかを調べるときは、一般項の番号 n が正の整数になるかを確認することが重要である。

演習問題

練習問題 1

正の整数 n に対して、数列 $a_n = n^2 + 1$ を考える。
この数列が等差数列であるかを判定し、その理由を説明せよ。

練習問題 2

初項が -4 、公差が -3 の等差数列について、第 5 項を求めよ。
また、この数列が減少する理由を公差を用いて説明せよ。

練習問題 3

初項が $\frac{1}{3}$ 、公差が $\frac{2}{3}$ の等差数列について、一般項を求めよ。
さらに、第 4 項を求め、一般項が元の条件を満たすことを確認せよ。

練習問題 4

全ての正の整数 n について $a_n = 7$ と定めた数列を考える。
この数列が等差数列であるかを答え、公差を求めよ。
また、公差が 0 のときの数列の特徴を説明せよ。

練習問題 5

ある等差数列について、第 2 項が 5、第 6 項が 17 である。
初項と公差を求め、一般項を求めよ。

練習問題 6

ある等差数列の一般項が $a_n = 4n - 7$ で表される。
この数列が等差数列であることを説明し、公差を求めよ。

練習問題 7

初項が 2、公差が 5 の等差数列について、20 がこの数列の項として現れるか調べよ。
現れる場合は何項目かを答え、現れない場合はその理由を説明せよ。

練習問題 8

等差数列の一般項について、 $a_n = a_1 + nd$ と考えることが一般には正しくない理由を説明せよ。
また、正しい一般項を示し、その理由を説明せよ。

練習問題 1 の解説

等差数列であるかを調べるには、隣り合う項の差が全て一定になるかを確認する。
まず、

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= ((n+1)^2 + 1) - (n^2 + 1) \\&= n^2 + 2n + 1 + 1 - n^2 - 1 \\&= 2n + 1\end{aligned}$$

となる。

この差は n によって変化するため、一定ではない。

実際に $n = 1$ のとき差は 3、 $n = 2$ のとき差は 5 となり、隣り合う項の差が異なる。

したがって、この数列は等差数列ではない。

検算すると、 $a_1 = 2$ 、 $a_2 = 5$ 、 $a_3 = 10$ であり、差は 3、5 となるため、等差数列の条件を満たさない。

練習問題 2 の解説

初項と公差が分かっているので、一般項を使う。

$a_1 = -4$ 、 $d = -3$ であるから、 $a_n = -4 + (n-1)(-3)$ となる。

第 5 項では $n = 5$ を代入する。

$$\begin{aligned}a_5 &= -4 + (5-1)(-3) \\&= -4 - 12 \\&= -16\end{aligned}$$

したがって、第 5 項は -16 である。

また、公差が $-3 < 0$ なので、項が進むたびに 3 ずつ小さくなる。よって、この数列は減少する。

検算すると、 $-4, -7, -10, -13, -16$ となり、隣り合う差はすべて -3 である。

練習問題 3 の解説

一般項の公式を使う。

$a_1 = \frac{1}{3}$ 、 $d = \frac{2}{3}$ なので、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3} + (n-1)\frac{2}{3} \\ &= \frac{2n-1}{3} \end{aligned}$$

となる。

第 4 項は、

$$a_4 = \frac{2 \times 4 - 1}{3}$$

より、

$$a_4 = \frac{7}{3}$$

である。

検算すると、初項は

$$a_1 = \frac{2 \times 1 - 1}{3} = \frac{1}{3}$$

となり、隣り合う項の差は全て

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3}$$

である。

したがって、求めた一般項は初項 $\frac{1}{3}$ 、公差 $\frac{2}{3}$ の等差数列を正しく表している。

練習問題 4 の解説

全ての正の整数 n について $a_n = 7$ なので、数列は $7, 7, 7, 7, \dots$ となる。

隣り合う項の差を調べると、 $a_{n+1} - a_n = 7 - 7 = 0$ である。

全ての正の整数 n で差が 0 となるため、この数列は等差数列であり、公差は $d = 0$ である。

公差が 0 の場合、項を進めても値が変化しないため、全ての項が同じ値になる。

検算すると、どの隣接項の差も 0 であり、等差数列の条件を満たしている。

練習問題 5 の解説

第 2 項と第 6 項の差から、公差を求める。

第 2 項から第 6 項までは、 $6 - 2 = 4$ 回移動している。

したがって、

$$17 - 5 = 4d$$

$$12 = 4d$$

$$d = 3$$

となる。

次に第 2 項を使う。

$a_2 = a_1 + d$ なので、 $5 = a_1 + 3$ より、 $a_1 = 2$ となる。

よって一般項は、

$$a_n = 2 + (n - 1)3$$

$$= 3n - 1$$

である。

検算すると、 $a_2 = 6 - 1 = 5$ 、 $a_6 = 18 - 1 = 17$ となり、条件を満たしている。

練習問題 6 の解説

一般項から隣り合う項の差を調べる。

$a_n = 4n - 7$ より、 $a_{n+1} = 4(n + 1) - 7 = 4n - 3$ となる。

したがって、

$$a_{n+1} - a_n = (4n - 3) - (4n - 7)$$

$$= 4$$

となる。

すべての正の整数 n で差が 4 になるため、この数列は等差数列である。

公差は $d = 4$ である。

検算すると、第 1 項は $a_1 = 4 - 7 = -3$ 、第 2 項は $a_2 = 8 - 7 = 1$ で、差は 4 になる。

練習問題 7 の解説

一般項を求める。

$a_1 = 2$ 、 $d = 5$ なので、 $a_n = 2 + (n - 1)5$ である。

整理すると、 $a_n = 5n - 3$ となる。

20 が項として現れるなら、 $5n - 3 = 20$ を満たす正の整数 n が存在する必要がある。

解くと、 $5n = 23$ より、

$$n = \frac{23}{5}$$

となる。

これは正の整数ではない。

したがって、20 はこの数列の項として現れない。

検算すると、項番号が整数にならないため、数列の並びの中に 20 は含まれない。

練習問題 8 の解説

第 1 項から第 n 項までに何回公差分の変化があるかを考える。

第 1 項から第 2 項へ進むときが 1 回、第 3 項へ進むときが 2 回であるため、第 n 項へ到達する変化の回数は $n - 1$ 回である。

したがって、正しい一般項は、 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ である。

一方、 $a_n = a_1 + nd$ とすると、 $n = 1$ のとき、 $a_1 + d$ となる。

もし $d \neq 0$ ならば、これは初項 a_1 と一致せず、誤りである。

ただし、 $d = 0$ の場合は、 $a_1 + nd = a_1 + (n - 1)d = a_1$ となり、偶然どちらの式でも同じ値になる例外である。

したがって、一般に使える公式は $a_n = a_1 + (n - 1)d$ であり、移動回数が $n - 1$ 回であることが理由である。