第 239 講 楕円

学習目標

- 楕円を、2 焦点までの距離の和が一定である点の軌跡として説明できる。
- 楕円の基本形から、長軸・短軸の向き、頂点、焦点を読み取れる。
- a, b, c の関係 $c^2 = a^2 - b^2$ を用いて、楕円の方程式と焦点を求められる。

1. 2 焦点までの距離の和が楕円をつくる

楕円の焦点

異なる 2 定点 F_1, F_2 に対し、$PF_1 + PF_2$ が一定である点 P の軌跡を楕円という。ただし、その一定値は F_1F_2 より大きいものとする。F_1, F_2 を楕円の焦点という。
一定値を $2a$、$F_1F_2 = 2c$ と書けば、条件は $PF_1 + PF_2 = 2a$、$0 < c < a$ である。一方の焦点から遠ざかると、和を保つためにもう一方へ近づくので、軌跡は 2 焦点を囲む閉じた曲線になる。

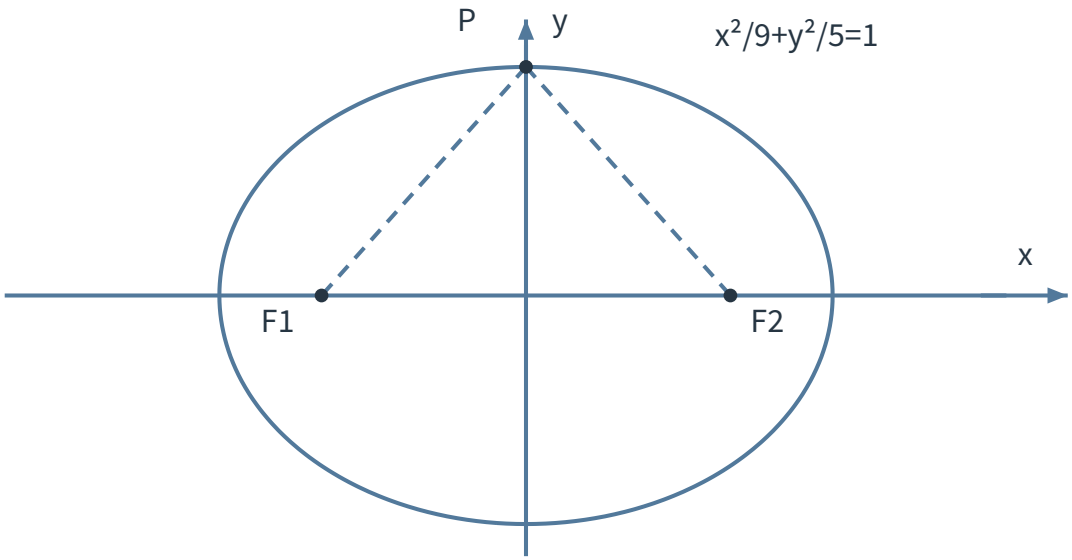

図 1　2 焦点からの距離の和が 6 である楕円

ひもの長さが変わらない見方

2 焦点にひもの両端を固定し、ひもを張ったまま鉛筆を動かすと考える。鉛筆の位置を P とすれば、張られた 2 部分の長さの和が $PF_1 + PF_2$ であり、ひもの長さは一定である。この見方は軌跡の定義を表すが、方程式や焦点の計算には次の基本形を用いる。

2. 横長の楕円の基本形

距離の条件から基本形へ

$a > c > 0$ とし、焦点を $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$、距離の和を $2a$ とする。点 $P(x, y)$ に対する条件は

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

©ミライコーチング

である。根号を一方ずつ孤立させて 2 回二乗し、整理すると

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

を得る。ここで $b^2=a^2-c^2$ とおけば $a>b>0$ であり、楕円の基本形

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

となる。逆に、この基本形から $|x|\le a$ であり、$a>c$ だから $a\pm\frac{cx}{a}>0$ である。式を逆にたどって 2 焦点までの距離を表せば、その和は $2a$ となる。したがって、焦点の位置を決める関係は $c^2=a^2-b^2$ である。

横長の楕円

$a>b>0$ のとき、$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ は横長の楕円である。頂点は $(\pm a,0),(0,\pm b)$、焦点は $(\pm c,0)$ であり、$c=\sqrt{a^2-b^2}$ である。長軸の長さは $2a$、短軸の長さは $2b$ である。

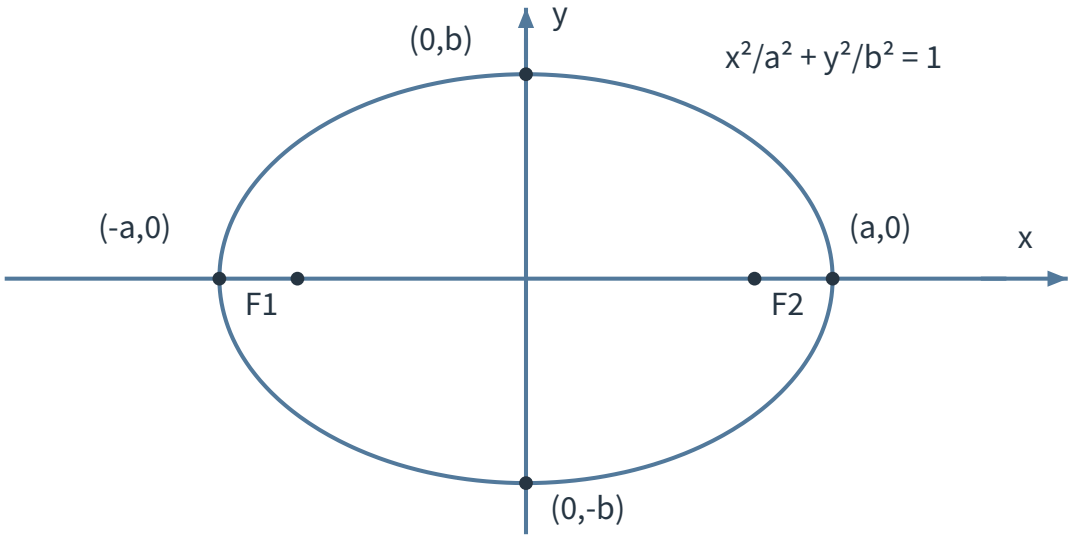

図 2　横長の楕円の頂点と焦点

例題 1：基本形から焦点を求める

楕円 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ の長軸・短軸の長さ、頂点、焦点を求めよ。

例題 1 の解答・解説

$25>9$ だから長軸は x 軸上にあり、$a=5,b=3$ である。よって長軸の長さは 10、短軸の長さは 6、頂点は $(\pm5,0),(0,\pm3)$ である。
$c^2=a^2-b^2=25-9=16$ より $c=4$ であるから、焦点は $(\pm4,0)$ である。

例題 2：焦点と距離の和から方程式を求める

焦点が $(\pm 3, 0)$ で、楕円上の点から 2 焦点までの距離の和が 10 である楕円の方程式を求めよ。

例題 2 の解答・解説

$2a = 10$ より $a = 5$、焦点から $c = 3$ である。$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$ だから、求める方程式は $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ である。

3. 縦長の楕円と円の特別な場合

大きい分母が長軸を示す

分母の大きい二乗項に対応する座標軸が長軸になる。したがって $a > b > 0$ のとき、$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ は縦長であり、焦点も y 軸上に並ぶ。

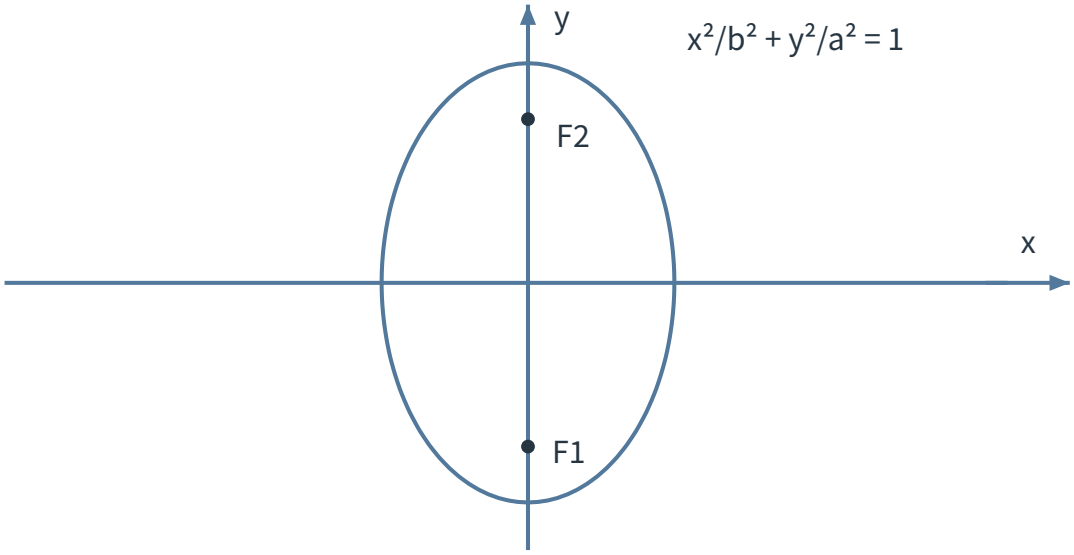

図 3　縦長の楕円では焦点が y 軸上に並ぶ

縦長の楕円

$a > b > 0$ のとき、$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ の頂点は $(\pm b, 0), (0, \pm a)$、焦点は $(0, \pm c)$ であり、$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ である。

円は焦点が重なる特別な場合

基本形で $a = b$ になると $c^2 = a^2 - b^2 = 0$ だから、2 焦点は原点で重なる。方程式は $x^2 + y^2 = a^2$ となり、半径 a の円である。楕円を異なる 2 焦点から定義するときは $a > b$ であり、円はその基本形を $a = b$ まで広げた特別な場合として扱う。

©ミライコーチング

例題 3：縦長の楕円

楕円 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ の長軸の向き、頂点、焦点を求めよ。

例題 3 の解答・解説

$25>16$ だから長軸は y 軸上にあり、$a=5, b=4$ である。頂点は $(\pm4,0),(0,\pm5)$ である。$c^2=25-16=9$ より $c=3$ だから、焦点は $(0,\pm3)$ である。

4. 演習問題

演習 1：横長の楕円

楕円 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ の長軸・短軸の長さ、頂点、焦点を求めよ。

演習 2：縦長の楕円

楕円 $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$ の長軸の向きと焦点を求めよ。

演習 3：焦点から方程式をつくる

焦点が $(\pm2,0)$ で、長軸の長さが 6 である楕円の方程式を求めよ。

演習 4：距離の和を確かめる

楕円 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上の点 $P(0,3)$ について、2 焦点までの距離の和を求めよ。

演習 5：点を通る楕円

$a>b>0$ とする。焦点が $\left(\pm\sqrt{5},0\right)$ で、点 $(0,2)$ を通る楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ の方程式を求めよ。

5. 演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

$a=6, b=2\sqrt{5}$ だから、長軸の長さは 12、短軸の長さは $4\sqrt{5}$ である。頂点は $(\pm6,0),\left(0,\pm2\sqrt{5}\right)$ である。$c^2=36-20=16$ より、焦点は $(\pm4,0)$ である。

演習 2 の解答・解説

大きい分母 16 は y^2 の下にあるので、長軸は y 軸上にある。$a=4, b=\sqrt{7}$ であり、$c^2=16-7=9$ だから、焦点は $(0,\pm3)$ である。

演習 3 の解答・解説

長軸の長さが 6 だから $2a=6$ より $a=3$ である。また $c=2$ なので、$b^2=a^2-c^2=9-4=5$ である。したがって、方程式は $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ である。

©ミライコーチング

演習 4 の解答・解説

$a=5, b=3$ より $c^2=25-9=16$ だから、焦点は $F_1(-4,0), F_2(4,0)$ である。

$$PF_1=\sqrt{4^2+3^2}=5, \qquad PF_2=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

であるから、距離の和は 10 である。これは $2a=10$ と一致する。

演習 5 の解答・解説

点 $(0,2)$ を方程式へ代入すると $\frac{4}{b^2}=1$ より $b^2=4$ である。焦点から $c^2=5$ であり、$c^2=a^2-b^2$ だから $a^2=5+4=9$ である。したがって、方程式は $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ である。

©ミライコーチング