第 213 講 定積分の性質

学習目標

この講では、定積分の性質を端点評価から導き、式・区間・大小関係に応じて使い分けられるようになることを目標とする。

- 積分区間の向きを逆にしたときの符号と、上下端が同じときの値を説明できる。
- 線形性を用いて、和・差・定数倍の定積分を既知の定積分から計算できる。
- 区間加法性を用いて、1 つの区間を分けたり、隣接する区間をつないだりできる。
- 区間全体の関数の大小関係から、定積分の大小関係を導ける。
- 性質を使う前に、関数が区間全体で定義・連続であるという本講の十分条件を確認できる。

性質の共通の出発点は端点の差である

定積分の性質は、別々の公式を暗記するより、原始関数の端点評価へ戻ると理解しやすい。関数 f の原始関数を F とすると、定積分は次の端点の差で表される。

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

右辺には、上端での値、下端での値、それらを引く順序が含まれている。積分区間の向きと区間分割は、この差の作り方を変えて考える。和・差・定数倍は原始関数の作り方を変えて考える。関数の大小は、原始関数の増減へ結び付けて考える。

本講で性質を使うための十分条件

実数 $a < b$ とする。関数 f, g は閉区間 $[a, b]$ 全体で連続であり、α, β は実数であるとする。区間を分けるときは、$a \leq c \leq b$ を満たす実数 c を用いる。

これらは、本講で定積分の性質を安全に用いるための十分条件である。必要条件を述べたものではない。問題では、式だけを見るのではなく、端点を含む区間全体で関数が定義され、連続であることを確認する。

積分区間の向きと同じ端点

上下端が同じなら、原始関数の同じ値を引くため、定積分は 0 になる。

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

積分区間の向きを逆にすると、端点差の引く順序が逆になる。

$$\begin{aligned}\int_b^a f(x)\,dx &= F(a) - F(b) \\ &= -\{F(b) - F(a)\} \\ &= -\int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

向きを逆にする操作は、積分値へマイナスを付ける操作である。グラフの形や関数の正負を見て符号を決めるのではない。

©ミライコーチング

線形性は和・差・定数倍を保つ

$F'=f$、$G'=g$ とする。このとき、$\alpha F+\beta G$ を微分すると $\alpha f+\beta g$ になるため、$\alpha F+\beta G$ は $\alpha f+\beta g$ の原始関数である。端点評価を行うと、次の線形性が得られる。

$$\int_a^b \{\alpha f(x)+\beta g(x)\}\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx$$

例えば、係数 β が負なら、その符号も含めて既知の定積分へ掛ける。定積分は、被積分関数の和・差・定数倍を、そのまま積分値の和・差・定数倍へ移せる。

区間加法性は中間の端点値が消えることから生まれる

$a<c<b$ とする。原始関数 F の端点差は、次のように分けられる。

$$F(b)-F(a)=\{F(c)-F(a)\}+\{F(b)-F(c)\}$$

右辺では $F(c)$ が一度足され、一度引かれるため消える。したがって、区間加法性が成り立つ。

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

$c=a$ のときは $\int_a^a f(x)\,dx=0$、$c=b$ のときは $\int_b^b f(x)\,dx=0$ であるため、同じ式が成り立つ。よって、$a\le c\le b$ の全範囲で使える。



図 1　$a=0<c=1<b=3$：区間$[a,b]$をcで分ける位置関係

数直線では、左の区間 $[a,c]$ と右の区間 $[c,b]$ が点 c を共有している。2 つの積分は、向きがともに左から右へそろっているので足す。

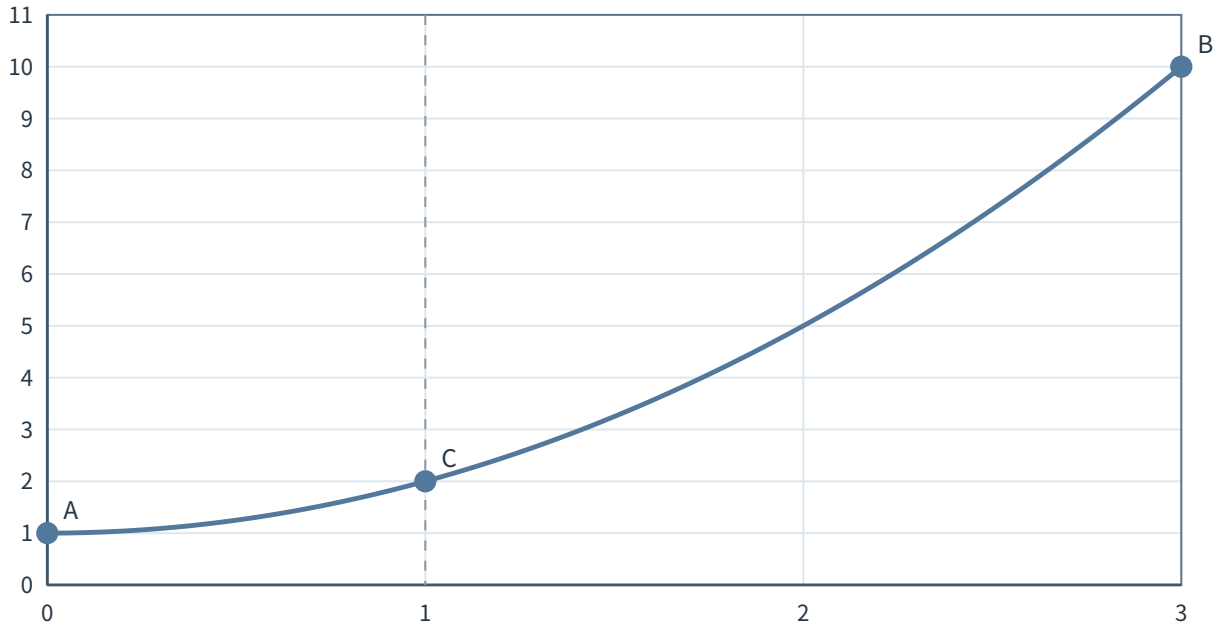

図 2　$f(x) = x^2 + 1$：区間$[0, 3]$を$x = 1$で分ける

図の点 A、C、B はそれぞれ $(0, 1)$、$(1, 2)$、$(3, 10)$ であり、破線は分割位置 $x = 1$ を示す。この図で用いる区間加法性は次の式である。

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx$$

この図は区間の分け方を示すものであり、図だけから積分値を読み取るものではない。

区間全体の大小関係は積分値の大小関係を保つ

$[a, b]$ 全体で $f(x) \leq g(x)$ とする。差を $h(x) = g(x) - f(x)$ とおくと、$h(x) \geq 0$ である。h の原始関数を H とすれば、$H'(x) = h(x) \geq 0$ であるため、H は $[a, b]$ で単調増加する。したがって、$H(b) - H(a) \geq 0$ である。
端点評価と線形性から、次の関係を得る。

$$0 \leq \int_a^b \{g(x) - f(x)\}\,dx$$

$$= \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$

以上より、比較定理が成り立つ。

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

比較定理によってこの結論を導くには、$f(x) \leq g(x)$ が区間全体で成り立つことを確認する。一部の点で大小を比べるだけでは、比較定理を適用できない。

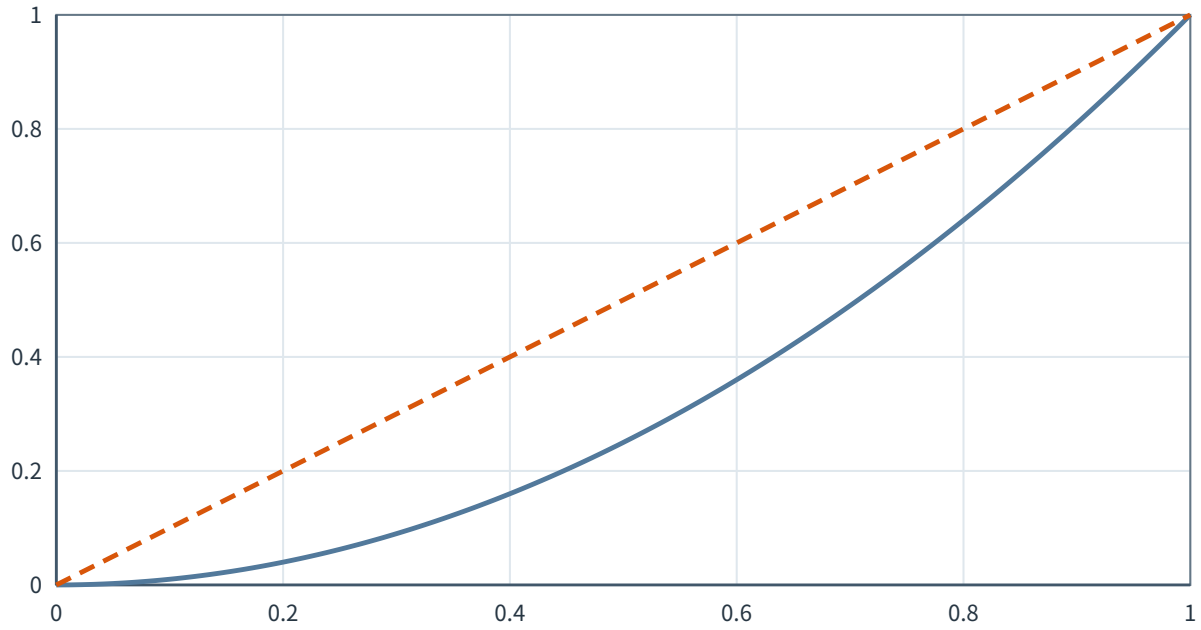

図 3　$0 \le x \le 1$における$f(x) = x^2$（実線）と$g(x) = x$（破線）：$f(x) \le g(x)$

$0 \le x \le 1$ では $x^2 \le x$ が区間全体で成り立つ。したがって、実線の関数の定積分は、破線の関数の定積分以下になる。

どの情報が与えられたかで性質を選ぶ

- 被積分関数が和・差・定数倍になっているときは、線形性を使う。
- 積分区間が隣り合っているときは、区間加法性を使う。
- 積分区間の向きが逆なら、符号を反対にする。
- 区間全体で関数の大小が分かるときは、比較定理を使う。
- 区間全体で $m \le f(x) \le M$ なら、定数関数と比較して次の評価を得る。

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

性質を使う前に確認すること

区間を分ける式では、向きがそろった 2 つの定積分を足す。被積分関数が負の値を取る区間でも、後半の定積分を機械的に引かない。
大小関係は、端点だけでなく区間全体で確認する。また、端点を含む区間全体で関数が定義され、連続であるという本講の十分条件を満たすかを確かめる。区間内に未定義の点があるときは、式だけを形式的に適用しない。

©ミライコーチング

例題

例題 1：線形性

関数 f, g は区間 $[0, 2]$ で連続である。次の値が与えられている。

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 3, \qquad \int_0^2 g(x)\,dx = -1$$

このとき、$\int_0^2 \{2f(x) - 3g(x)\}\,dx$ を求めよ。

例題 1 の解答・解説

f, g は区間 $[0, 2]$ 全体で連続であるため、本講の十分条件を満たす。線形性により、和と係数を定積分の外へ移せる。

$$\begin{aligned}\int_0^2 \{2f(x) - 3g(x)\}\,dx &= 2\int_0^2 f(x)\,dx - 3\int_0^2 g(x)\,dx \\ &= 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \\ &= 9\end{aligned}$$

したがって、求める値は 9 である。g の定積分が -1 であり、さらに係数が -3 であるため、その積は正になる。

例題 2：区間分割と向き

関数 f は区間 $[0, 5]$ で連続である。次の値が与えられている。

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 5, \qquad \int_0^5 f(x)\,dx = 1$$

$\int_2^5 f(x)\,dx$ と $\int_5^2 f(x)\,dx$ を求めよ。

例題 2 の解答・解説

区間 $[0, 5]$ を $x = 2$ で分ける。区間加法性から、次の等式を得る。

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx$$

与えられた値を代入すると、$1 = 5 + \int_2^5 f(x)\,dx$ である。したがって、$\int_2^5 f(x)\,dx = -4$ となる。

向きを逆にすると符号が反対になるため、次の値を得る。

$$\int_5^2 f(x)\,dx = -\int_2^5 f(x)\,dx = 4$$

したがって、求める値は順に -4、4 である。部分区間の定積分が負になることと、区間を逆向きにすることによる符号変化を区別する。

©ミライコーチング

例題 3：比較定理

$0 \le x \le 1$ において $x^2 \le x$ であることを用いる。次の不等式を示し、両辺の値を求めよ。

$$\int_0^1 x^2\,dx \le \int_0^1 x\,dx$$

例題 3 の解答・解説

$0 \le x \le 1$ では、$x \ge 0$ かつ $1 - x \ge 0$ である。したがって、$x - x^2 = x(1-x) \ge 0$ となり、区間全体で $x^2 \le x$ が成り立つ。両方の関数は区間 $[0,1]$ で連続であるため、比較定理を使える。
各定積分を端点評価すると、次の値になる。

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

よって、実際に $\frac{1}{3} \le \frac{1}{2}$ である。比較定理を使う根拠は、端点だけでなく区間全体で $x^2 \le x$ が成り立つことである。

演習問題

演習 1：線形性の数値計算

関数 f, g は区間 $[1,3]$ で連続である。次の値が与えられている。

$$\int_1^3 f(x)\,dx = 4, \qquad \int_1^3 g(x)\,dx = -2$$

$\int_1^3 \{3f(x) + 2g(x)\}\,dx$ を求めよ。

演習 2：同じ端点と逆向き

関数 f は区間 $[-1,2]$ で連続であり、$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 6$ である。次を求めよ。

(1) $\int_2^{-1} f(x)\,dx$

(2) $\int_1^1 f(x)\,dx$

©ミライコーチング

演習 3：未知の部分区間

関数 f は区間 $[0,4]$ で連続である。次の値が与えられている。

$$\int_0^4 f(x)\,dx = 7, \qquad \int_0^1 f(x)\,dx = -2$$

$\int_1^4 f(x)\,dx$ を求めよ。

演習 4：区間分割の誤りを見抜く

関数 f は区間 $[0,5]$ で連続である。次の値が与えられている。

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 4, \qquad \int_2^5 f(x)\,dx = -1$$

ある生徒は、区間を分けるときは後半を引くと考え、$\int_0^5 f(x)\,dx = 4-(-1) = 5$ とした。この誤りを説明し、正しい値を求めよ。

演習 5：関数の大小を積分へ移す

$0 \le x \le 2$ において $x \le x+1 \le 3$ が成り立つことを用い、$\int_0^2 (x+1)\,dx$ を比較定理によって上と下から評価せよ。その後、実際の積分値も求め、得られた範囲内にあることを確かめよ。

演習 6：定数による上下評価

関数 f は区間 $[1,3]$ で連続であり、区間全体で $2 \le f(x) \le 5$ を満たす。比較定理を用いて、$\int_1^3 f(x)\,dx$ を定数で上と下から評価せよ。

演習 7：絶対値評価の導出

実数 $a < b$ とし、関数 f は区間 $[a,b]$ で連続である。区間全体で次の不等式が成り立つ。

$$-|\,f(x)\,| \le f(x) \le |\,f(x)\,|$$

この不等式と比較定理を用いて、次を示せ。

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |\,f(x)\,|\,dx$$

演習 8：区間全体の条件

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$ について、$\frac{1}{x^2} \ge 0$ だから非負関数に対する性質をそのまま使えると判断してよいか。本講の十分条件に照らして答えよ。

©ミライコーチング

演習問題の解答・解説

演習 1 の解答・解説

f, g は区間 $[1, 3]$ 全体で連続であるため、線形性を使える。係数を各定積分へ分けて掛ける。

$$\begin{aligned}\int_1^3 \{3f(x) + 2g(x)\}\,dx &= 3\int_1^3 f(x)\,dx + 2\int_1^3 g(x)\,dx \\ &= 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) \\ &= 8\end{aligned}$$

したがって、求める値は 8 である。

演習 2 の解答・解説

(1) 積分区間の向きを逆にすると、定積分の符号が反対になる。

$$\int_2^{-1} f(x)\,dx = -\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = -6$$

(2) 上下端が同じであるため、原始関数の同じ値を引くことになる。

$$\int_1^1 f(x)\,dx = 0$$

したがって、求める値は (1) -6、(2) 0 である。

演習 3 の解答・解説

区間 $[0, 4]$ を $x = 1$ で分ける。区間加法性により、次の等式を得る。

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^4 f(x)\,dx$$

与えられた値を代入すると、$7 = -2 + \int_1^4 f(x)\,dx$ である。したがって、求める値は 9 である。

部分区間の定積分 9 が全体の定積分 7 より大きくても矛盾しない。もう一方の部分区間の定積分が -2 だからである。

演習 4 の解答・解説

誤りは、向きがそろった隣接区間の定積分を引いたことである。区間加法性では、$[0, 2]$ と $[2, 5]$ の定積分を足す。

$$\begin{aligned}\int_0^5 f(x)\,dx &= \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx \\ &= 4 + (-1) \\ &= 3\end{aligned}$$

したがって、正しい値は 3 である。後半の定積分がすでに -1 という符号を含むため、その値をそのまま足す。

©ミライコーチング

演習 5 の解答・解説

$0 \le x \le 2$ の区間全体で $x \le x+1 \le 3$ が成り立ち、3 つの関数は連続である。比較定理により、次の評価を得る。

$$\int_0^2 x\,dx \le \int_0^2 (x+1)\,dx \le \int_0^2 3\,dx$$

両端を計算すると、次の範囲になる。

$$2 \le \int_0^2 (x+1)\,dx \le 6$$

実際の積分値は次のとおりである。

$$\int_0^2 (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^2$$

$$= 4$$

値 4 は、比較定理で得た範囲 $2 \le 4 \le 6$ に入っている。

演習 6 の解答・解説

区間 $[1,3]$ 全体で $2 \le f(x) \le 5$ が成り立つため、定数関数 2 と 5 を用いて比較できる。

$$\int_1^3 2\,dx \le \int_1^3 f(x)\,dx \le \int_1^3 5\,dx$$

定数関数の定積分は、定数と区間の長さの積である。

$$\int_1^3 2\,dx = 2(3-1) = 4,$$

$$\int_1^3 5\,dx = 5(3-1) = 10$$

したがって、定積分は次のように評価できる。

$$4 \le \int_1^3 f(x)\,dx \le 10$$

©ミライコーチング

演習 7 の解答・解説

関数 f が連続であるため、$|f|$ も区間 $[a,b]$ で連続である。区間全体の不等式へ比較定理を適用すると、次の関係を得る。

$$\int_a^b \{-|f(x)|\}\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

線形性により、左端は $-\int_a^b |f(x)|\,dx$ である。そこで、次のようにおく。

$$A=\int_a^b |f(x)|\,dx, \qquad I=\int_a^b f(x)\,dx$$

$|f(x)|\ge 0$ であるため、比較定理から $A\ge 0$ である。先ほどの不等式は $-A\le I\le A$ となる。これは $|I|\le A$ と同値であるから、次の不等式が成り立つ。

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

演習 8 の解答・解説

関数 $\frac{1}{x^2}$ は、区間 $[-1,1]$ の内部にある $x=0$ で定義されない。したがって、区間全体で連続であるという本講の十分条件を満たさない。
また、原始関数 $-\frac{1}{x}$ を用いて、$x=0$ をまたぐ端点評価を形式的に行うことはできない。この講で扱う通常の定積分として値を定めず、非負関数に対する性質をそのまま適用しない。
よって、「$\frac{1}{x^2}\ge 0$ だから性質を使える」という判断は正しくない。区間全体で関数が定義されているかを、大小関係より先に確認する必要がある。