# 第 195 講 関数の増減

**学習目標**

この講では、導関数を利用して関数の増減を判断できるようになることを目標とする。
具体的には、次のことができるようになる。
- 関数が増加する区間、減少する区間の意味を説明できる。
- 導関数 $f'(x)$ の符号と、関数 $f(x)$ の増減の関係を利用できる。
- $f'(x)=0$ となる点だけでなく、定義域全体の区間分けを考えて増減を調べられる。

## 増減を見る理由

微分係数は、ある 1 点におけるグラフの傾きを表す量である。
しかし、関数の増減を調べるときに必要なのは、1 点の傾きではなく、ある区間全体でグラフがどちらへ進むかという情報である。
例えば、ある区間で常に接線の傾きが正ならば、グラフは左から右へ進むにつれて上昇する。このため、導関数の符号を調べることで関数全体の変化を判断できる。
関数 $f(x)$ がある区間で増加するとは、区間内の任意の 2 点 $a, b$ について $a<b$ ならば $f(a)<f(b)$ となることである。
同様に、減少するとは $a<b$ ならば $f(a)>f(b)$ となることである。

**導関数と増減の関係**

開区間 $I$ で微分可能な関数 $f(x)$ について考える。
区間 $I$ の全ての点で $f'(x)>0$ ならば、$f(x)$ は $I$ で狭義増加する。
区間 $I$ の全ての点で $f'(x)<0$ ならば、$f(x)$ は $I$ で狭義減少する。
区間 $I$ の全ての点で $f'(x)=0$ ならば、$f(x)$ は $I$ で定数である。
本講で扱う増加・減少は、等号を含まない狭義の意味で用いる。
端点を含む区間で考える場合は、関数が端点で定義され連続であることを確認する。

## 平均値の定理と増減の根拠

導関数の符号から増減を判断できる理由は、平均値の定理による。
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続であり、開区間 $(a,b)$ で微分可能で、$a<b$ ならば、$(a,b)$ 内のある点 $c$ に対して $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ が成り立つ。
この定理自体の証明は本講では扱わない。
$a<b$ では $b-a>0$ なので、$f'(c)$ の符号によって $f(b)-f(a)$ の符号が決まる。
また、全点で $f'(x)=0$ ならば、任意の $a<b$ に対して平均値の定理より $f(b)-f(a)=0$ となるため、$f(a)=f(b)$ であり関数は定数である。
閉端点で連続ならば、増減区間には端点を含めてよい。本講ではできるだけ広い区間で答える。

## 三次関数の増減と導関数の符号

次の図に示す $f(x)=x^3-3x$ の増減について考える。
導関数は $f'(x)=3(x-1)(x+1)$ であり、$x=-1,1$ を境に符号が変化する。
点 $A(-1,2)$ より左側では $f'(x)>0$ なので増加する。
点 $A(-1,2)$ と点 $B(1,-2)$ の間では $f'(x)<0$ なので減少する。
点 $B(1,-2)$ より右側では $f'(x)>0$ なので増加する。

©ミライコーチング

このように、図の形を先に決めるのではなく、導関数の符号を調べることで区間ごとの変化を判断できる。

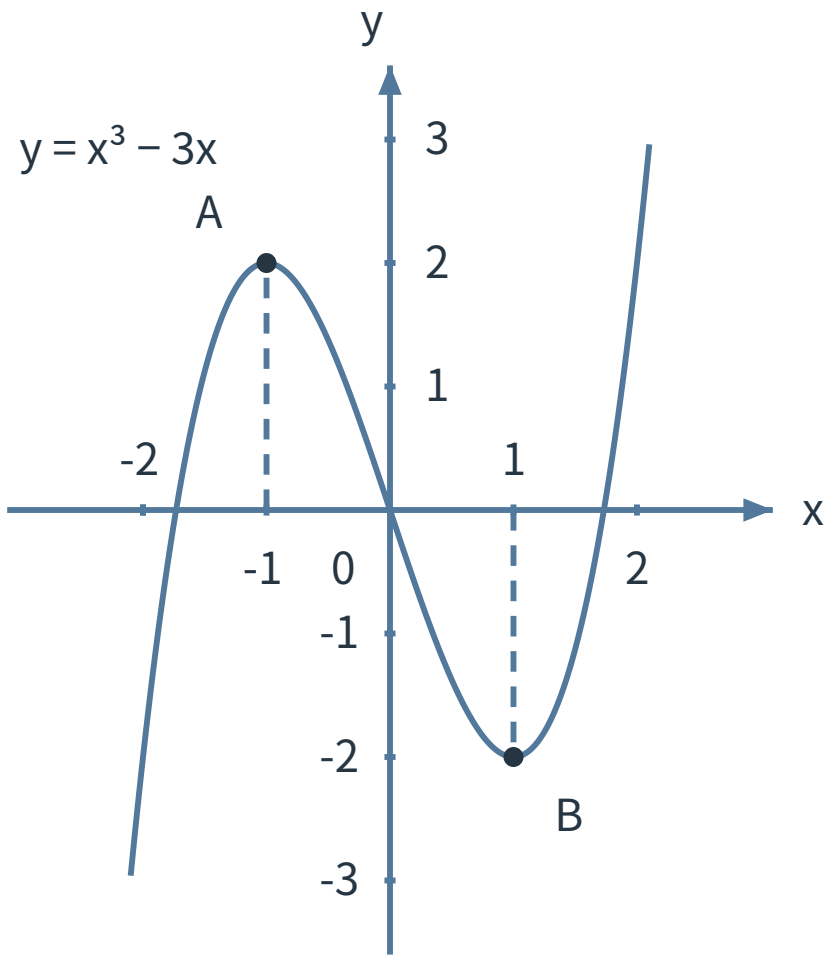


**図 1**　三次関数の増減と導関数が 0 になる点

## 増減表を作る考え方

増減を調べるときは、最初に関数の定義域を確認する。
1. 定義域を確認し、関数が定義されていない点や微分できない点があるか調べる。
2. 導関数 $f'(x)$ を求め、$f'(x) = 0$ となる点を求める。
3. 定義域内を区切り、各開区間で $f'(x)$ の符号を調べる。
4. 端点で関数が定義されているか、連続性があるかを確認して結論を述べる。

微分できない点では、本講で扱う微分可能な関数に対する増減の定理を直接適用できないため、別途判断する必要がある。
一点の値 $f'(a) > 0$ だけでは、区間全体の増加とは判定できない。増加・減少は区間全体の性質である。
定義域が分断される場合は、それぞれの区間ごとに考える。
例えば $f(x) = \frac{1}{x}$ は、定義域 $x < 0$ と $x > 0$ のそれぞれでは減少する。

しかし、定義域全体で減少するわけではない。
$-1 < 1$ である。
$f(-1) = -1 < f(1) = 1$ である。
これは減少の条件に反するため、$f(x) = \frac{1}{x}$ は定義域全体で減少するとはいえない。

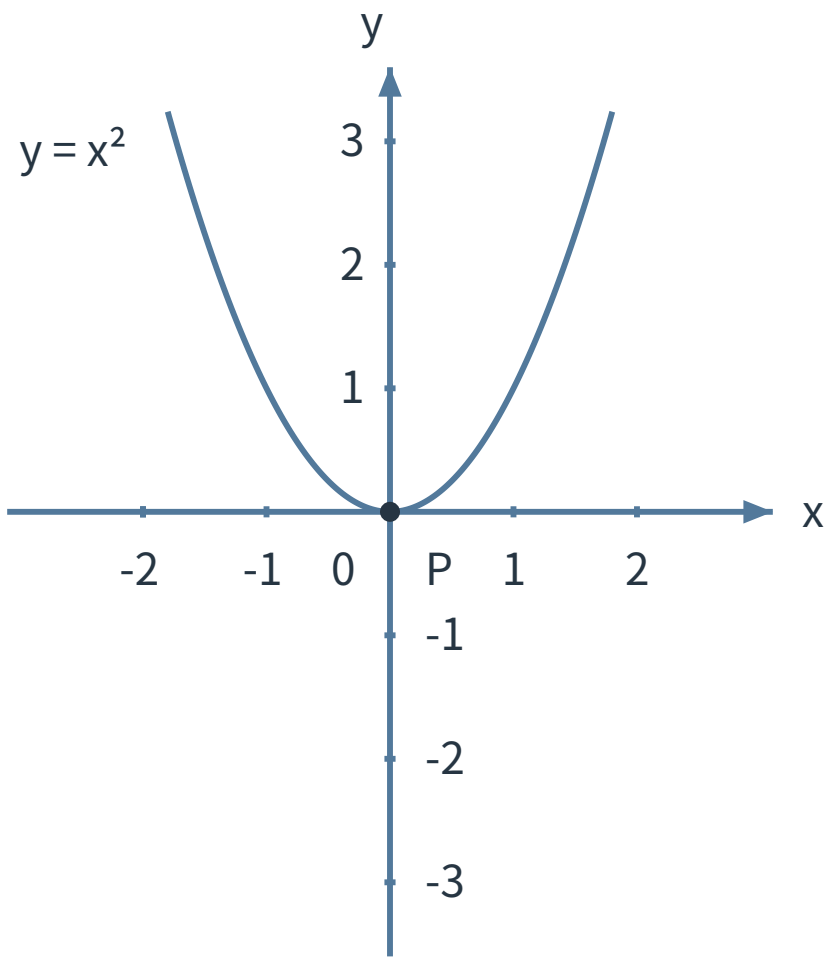


**図 2**　導関数が 0 になる点と増減の切り替わり

### $f'(x) = 0$ の扱い

$f'(x) = 0$ となる点は、増減を調べる区切りの候補である。しかし、その点だけで関数全体の変化を決めることはできない。
例えば $f(x) = x^2$ では導関数が $f'(x) = 2x$ であり、$x = 0$ の左側では負、右側では正になる。
一方、$f(x) = x^3$ では導関数が $f'(x) = 3x^2$ であり、$x = 0$ 以外では常に正である。そのため符号は変化しない。
実際、任意の $a < b$ に対して $b^3 - a^3 = (b - a)(a^2 + ab + b^2)$ である。
平方完成すると、次の等式が得られる。

$$a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}$$

$a<b$ のとき、2 数 $a,b$ が同時に 0 になることはないため、$a^2+ab+b^2$ は正である。
$b-a>0$ かつ $a^2+ab+b^2>0$ であるため、$b^3-a^3=(b-a)(a^2+ab+b^2)>0$ となる。
したがって、$x^3$ は全実数で狭義増加である。

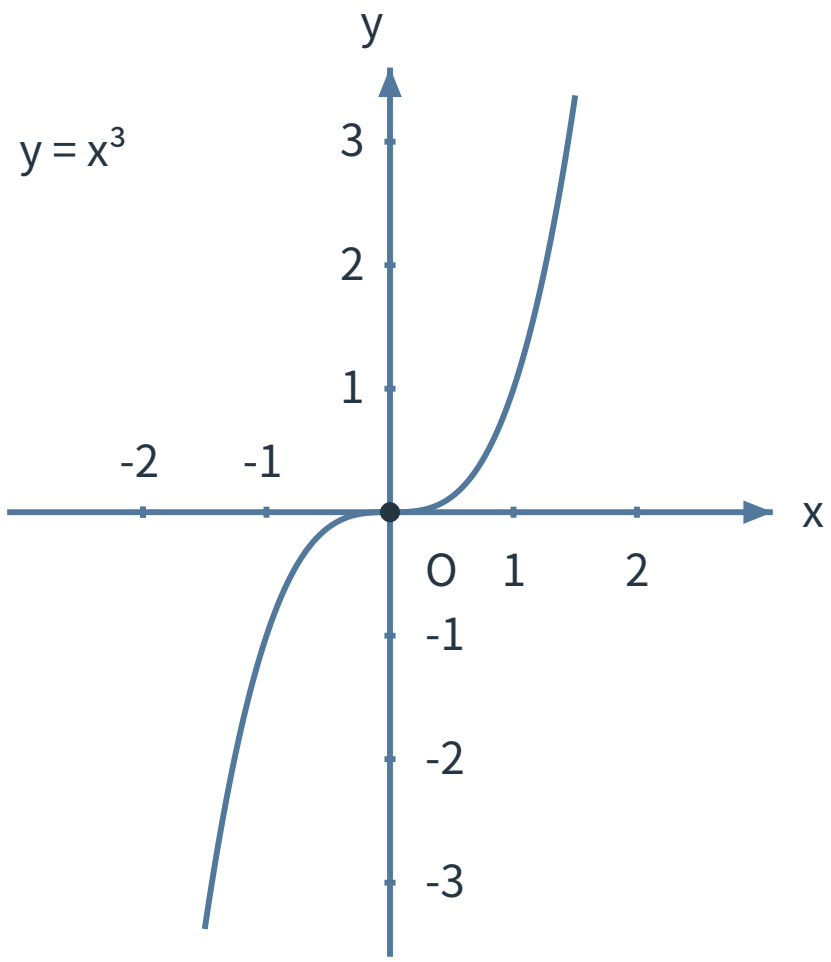


**図 3**　$f'(x)=0$ でも増減が変わらない例

**例題 1**

関数 $f(x)=x^2-4x+3$ の増加する区間と減少する区間を求めなさい。

## 例題 1 の解答・解説

導関数を求める。
$f'(x) = 2x - 4$ である。
$f'(x) = 0$ より、区切る点は $x = 2$ である。
$x < 2$ では $f'(x) < 0$、$x > 2$ では $f'(x) > 0$ となる。
関数 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ は多項式関数なので連続であり、端点 $x = 2$ を含めて表せる。
したがって、減少する区間は $x \leq 2$、増加する区間は $x \geq 2$ である。

**例題 2**

関数 $f(x) = x^3 - 3x$ の増減を調べなさい。

## 例題 2 の解答・解説

導関数を求める。
$f'(x) = 3x^2 - 3$ である。
因数分解すると、$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ である。
$f'(x) = 0$ より、区切る点は $x = -1, 1$ である。
$x < -1$ では $f'(x) > 0$、$-1 < x < 1$ では $f'(x) < 0$、$x > 1$ では $f'(x) > 0$ となる。
したがって、増加する区間は $x \leq -1$ と $x \geq 1$、減少する区間は $-1 \leq x \leq 1$ である。
2 つの増加区間は別々の区間であり、定義域全体で増加すると考えてはいけない。

**例題 3**

関数 $f(x) = x^3 + 3x^2$ の増減を調べなさい。

## 例題 3 の解答・解説

導関数を求める。
$f'(x) = 3x^2 + 6x$ である。
因数分解すると $f'(x) = 3x(x+2)$ である。
$f'(x) = 0$ より、区切る点は $x = -2, 0$ である。
$x < -2$ では $f'(x) > 0$、$-2 < x < 0$ では $f'(x) < 0$、$x > 0$ では $f'(x) > 0$ となる。
したがって、増加する区間は $x \leq -2$ と $x \geq 0$、減少する区間は $-2 \leq x \leq 0$ である。

**練習問題 1**

関数 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ の増加する区間と減少する区間を求めなさい。

**練習問題 2**

関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ の増加する区間と減少する区間を求めなさい。

©ミライコーチング

**練習問題 3**

関数 $f(x) = \sin x$ を、弧度法で表した定義域 $0 \leq x \leq 2\pi$ で考える。
増加する区間と減少する区間を求めなさい。

**練習問題 4**

関数 $f(x) = e^x - x$ の増減を調べなさい。

**練習問題 5**

関数 $f(x) = \log x - x$ を考える。ただし、$\log x$ は底 $e$ の自然対数であり、定義域は $x > 0$ とする。
増加する区間と減少する区間を求めなさい。

**練習問題 6**

関数 $f(x) = x^4 - 4x^2$ の増減を調べなさい。

**練習問題 7**

関数 $f(x) = x^3 - 3x$ を定義域 $-2 \leq x \leq 3$ で考える。
増加する区間と減少する区間を求めなさい。

**練習問題 8**

関数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ の定義域 $x > 0$ における増減を調べなさい。

## 練習問題 1 の解答・解説

導関数を求める。
$f'(x) = 2x + 2$ である。
$f'(x) = 0$ より、区切る点は $x = -1$ である。
$x < -1$ では $f'(x) < 0$、$x > -1$ では $f'(x) > 0$ となる。
多項式関数なので連続であり、端点を含めて答えられる。
したがって、減少する区間は $x \leq -1$、増加する区間は $x \geq -1$ である。

## 練習問題 2 の解答・解説

導関数を求める。
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ であり、$f'(x) = 3(x-1)(x-3)$ と変形できる。
$f'(x) = 0$ より、区切る点は $x = 1, 3$ である。
$x < 1$ では $f'(x) > 0$、$1 < x < 3$ では $f'(x) < 0$、$x > 3$ では $f'(x) > 0$ となる。
したがって、増加する区間は $x \leq 1$ と $x \geq 3$、減少する区間は $1 \leq x \leq 3$ である。
2 つの増加区間は別々に考える必要があり、1 つの連続した区間として扱わない。

©ミライコーチング

### 練習問題 3 の解答・解説

弧度法で考える。
$f'(x) = \cos x$ である。
$0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で符号を調べる。
$0 < x < \frac{\pi}{2}$ と $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ では $\cos x > 0$ である。
$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ では $\cos x < 0$ である。
したがって、増加する区間は $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ である。
増加するもう 1 つの区間は $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ である。
減少する区間は $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ である。

### 練習問題 4 の解答・解説

導関数を求める。
$f'(x) = e^x - 1$ である。
$f'(x) = 0$ より、区切る点は $x = 0$ である。
$x < 0$ では $e^x < 1$ なので $f'(x) < 0$、$x > 0$ では $e^x > 1$ なので $f'(x) > 0$ となる。
したがって、減少する区間は $x \leq 0$、増加する区間は $x \geq 0$ である。

### 練習問題 5 の解答・解説

$\log x$ は自然対数であり、定義域は $x > 0$ である。
導関数を求めると、$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ である。
$f'(x) = 0$ より、区切る点は $x = 1$ である。
$0 < x < 1$ では $f'(x) > 0$、$x > 1$ では $f'(x) < 0$ となる。
したがって、増加する区間は $0 < x \leq 1$、減少する区間は $x \geq 1$ である。

### 練習問題 6 の解答・解説

導関数を求めると、$f'(x) = 4x^3 - 8x$ である。
因数分解すると、$f'(x) = 4x\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$ である。
正の定数 4 を除き、3 因子 $x$、$x - \sqrt{2}$、$x + \sqrt{2}$ の符号を見る。

| 区間 | $x$ の符号 | $x - \sqrt{2}$ の符号 | $x + \sqrt{2}$ の符号 | 積の符号 |
|---|---|---|---|---|
| $x < -\sqrt{2}$ | 負 | 負 | 負 | 負 |
| $-\sqrt{2} < x < 0$ | 負 | 負 | 正 | 正 |
| $0 < x < \sqrt{2}$ | 正 | 負 | 正 | 負 |
| $x > \sqrt{2}$ | 正 | 正 | 正 | 正 |

したがって、減少する区間は $x \leq -\sqrt{2}$ と $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ である。
増加する区間は $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$ と $x \geq \sqrt{2}$ である。

### 練習問題 7 の解答・解説

導関数を求める。
$f'(x) = 3x^2 - 3$ であり、$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ である。
定義域は $-2 \leq x \leq 3$ なので、$x = -1, 1$ で区切る。
$-2 < x < -1$ では $f'(x) > 0$、$-1 < x < 1$ では $f'(x) < 0$、$1 < x < 3$ では $f'(x) > 0$ となる。
$-2 \leq x \leq -1$ では増加する。
$1 \leq x \leq 3$ では増加する。
$-1 \leq x \leq 1$ では減少する。

©ミライコーチング

## 練習問題 8 の解答・解説

定義域は $x > 0$ である。
導関数を求めると、$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ である。
$f'(x) = 0$ より、区切る点は $x = 1$ である。
$0 < x < 1$ では $f'(x) < 0$、$x > 1$ では $f'(x) > 0$ となる。
したがって、減少する区間は $0 < x \leq 1$、増加する区間は $x \geq 1$ である。

©ミライコーチング